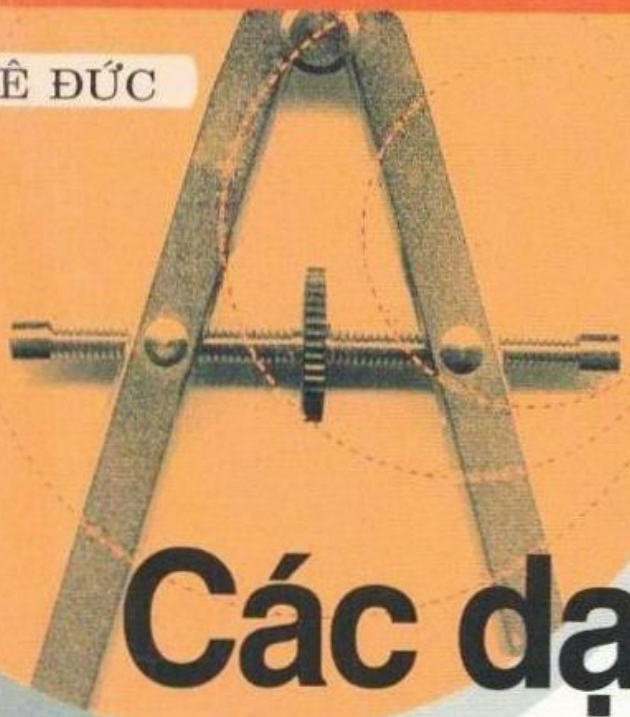
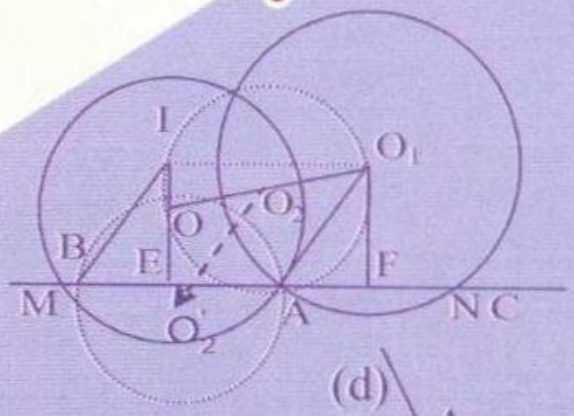
LÊ ĐỨC

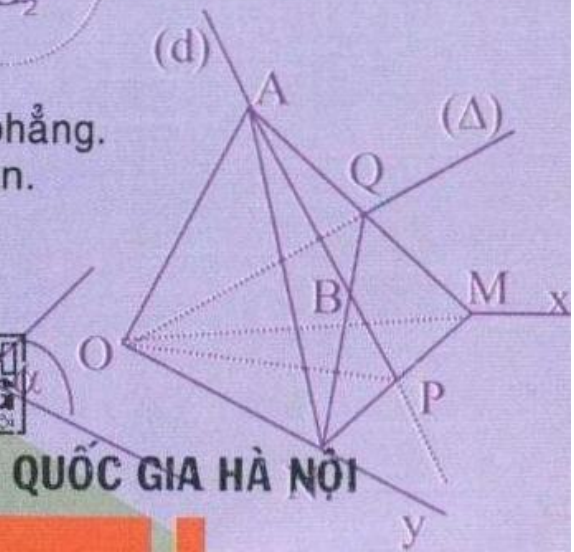


- Biên soạn theo chương trình SGK phân ban mới
- Rèn kĩ năng giải bài tập và luyện thi

Các dạng Toán điển hình

Hình học 11





- Phép dời hình và phép đồng dạng trong mặt phẳng.
- Đường thẳng và mặt phẳng trong không gian. Quan hệ song song.
- Vectơ trong không gian. Quan hệ vuông góc trong không gian.

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LÊ ĐỨC



Các dạng Toán điển hình

Hình học 11

- Biên soạn theo chương trình phân ban mới.
- Rèn kĩ năng giải toán. • Ôn tập và chuẩn bị cho các kì thi quốc gia... do Bộ GD&ĐT tổ chức.

ĐHQG Hà Nội

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
ĐT (04) 39714896; (04) 39724770. Fax: (04) 93714899

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập PHẠM THỊ TRÂM
Biên tập nội dung
THU HIỀN
Sửa bài
LÊ HÒA
Chế bản
CÔNG TI ANPHA
Trình bày bìa
SƠN KỲ
Đối tác liên kết xuất bản
CÔNG TI ANPHA

SÁCH LIÊN KẾT

CÁC DẠNG TOÁN ĐIỂN HÌNH HỌC 11
Mã số: 1L-258ĐH2009
In 2.000 cuốn, khổ 16 x 24 cm tại công ti TNHH in Bao bì Hưng Phú
Số xuất bản: 895-2009/CXB/06-155/ĐHQGHN, ngày 28/09/2009
Quyết định xuất bản số: 258 LK-TN/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2009.

GIỚI THIỆU CHUNG

Xin trân trọng giới thiệu tới bạn đọc cuốn sách:

CÁC DẠNG TOÁN ĐIỂN HÌNH HÌNH HỌC 11

do Nhóm Cự Môn biên soạn. Cuốn sách được viết dựa trên ý tưởng trình bày của bộ sách ***Phương pháp giải Toán*** *(gồm 11 tập) do Lê Hồng Đức chủ biên và đã được NXB Hà Nội ấn hành.*

Cuốn sách bao gồm 3 chương:

Chương I – PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẲNG

Chương II – ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN QUAN HỆ SONG SONG

Chương III – VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN QUAN HỆ VUÔNG GÓC

Ở mỗi chương chứa đựng các bài học (chủ đề 1, chủ đề 2, ...) theo nội dung chương trình của sách giáo khoa mới.

Mỗi bài học đều được chia thành 4 mục:

I. ***Tóm tắt lí thuyết****: Trình bày có trật tự nội dung kiến thức liên quan.*

II. ***Phương pháp giải toán (hoặc các ví dụ mẫu)***

Gồm các ví dụ được tuyển chọn có chọn lọc nhằm giúp hoàn thiện kiến thức cơ bản và nâng cao kỹ năng giải Toán.

III. ***Một số phương pháp giải câu hỏi trắc nghiệm***

IV. ***Bài tập tự giải***

Như vậy, ở mỗi bài học:

1. *Với việc trình bày mục tóm tắt lí thuyết, sẽ giúp các em học sinh hiểu rằng cần phải nắm vững những nội dung gì.*
2. *Tiếp đó, tới mục phương pháp giải toán, sẽ giúp các em học sinh hoàn thiện kiến thức.*

ABC

3. *Đặc biệt là nội dung của các **chú ý, nhận xét** và **yêu cầu** sau mỗi ví dụ sẽ giúp các em học sinh củng cố những thiết sót và cách nhìn nhận, đánh giá các vấn đề đặt ra.*

4. *Ngoài ra, còn có rất nhiều ví dụ được giải bằng nhiều cách khác nhau sẽ giúp các em học sinh trở nên linh hoạt trong việc lựa chọn phương pháp giải.*

Chúng tôi cũng xin trân trọng cảm ơn các bạn đồng nghiệp đã nhận lời đọc bản thảo, nhận lời tới dự giờ trong các tiết giảng thử của chúng tôi theo giáo trình này và từ đó đóng góp những nhận xét quí báu để giúp chúng tôi tới ngày hôm nay hoàn thiện được cuốn sách này.

Cuối cùng, cho dù đã rất cố gắng, nhưng thật khó tránh khỏi những thiếu sót bởi những hiểu biết và kinh nghiệm còn hạn chế, chúng tôi rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của bạn đọc gần xa.

Mọi ý kiến đóng góp xin liên hệ tới:

Trung tâm sách giáo dục Anpha

225C Nguyễn Tri Phương, P.9, Q.5, Tp. HCM.

- Công ti sách - thiết bị giáo dục Anpha

50 Nguyễn Văn Săng, Quận Tân Phú, TP.HCM

ĐT: 08.62676463, 38547464.

Email: alphabookcenter@yahoo.com

Xin trân trọng cảm ơn!

CHƯƠNG I

PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẲNG

CHỦ ĐỀ 1 MỞ ĐẦU VỀ PHÉP BIẾN HÌNH

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

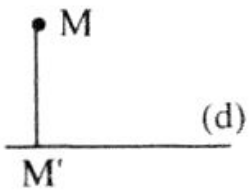
Định nghĩa: *Phép biến hình là một quy tắc để với mỗi điểm* M *của mặt phẳng xác định được một điểm duy nhất* M' *của mặt phẳng, điểm* M' *gọi là ảnh của điểm* M *qua phép biến hình đó.*

Nếu ta kí hiệu một phép biến hình nào đó là f thì:

- $M_1 = f(M)$.
- Nếu **H** là một hình nào đó thì tập hợp các điểm $M' = f(M)$, với $M \in \mathbf{H}$, tạo thành hình **H'**, ta viết $\mathbf{H'} = f(\mathbf{H})$.

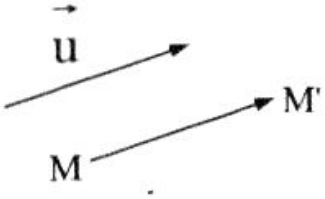
B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Cho đường thẳng* (d). *Với mỗi điểm* M, *ta xác định* M' *là hình chiếu (vuông góc) của* M *trên* (d) *thì ta được một phép biến hình.*



Phép biến hình này gọi là ***phép chiếu vuông góc lên đường thẳng*** (d).

Ví dụ 2: *Cho vectơ* $\vec{u}$, *với mỗi điểm M ta xác định điểm M' theo quy tắc* $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.



Như vậy, ta cũng có một phép biến hình. Phép biến hình đó gọi là ***phép tịnh tiến theo vectơ*** $\vec{u}$.

Ví dụ 3: *Với mỗi điểm M, ta xác định điểm M' trùng với M thì ta cũng có được một phép biến hình.*

Phép biến hình đó gọi là ***phép đồng nhất***.

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài tập 1: Hãy vẽ ảnh của các hình sau qua phép chiếu vuông góc lên đường thẳng (d):

a. Đường tròn (O, R).

b. Đoạn thẳng AB = a, biết AB song song với (d).

c. Đoạn thẳng AB = a, biết AB vuông góc với (d).

d. Đoạn thẳng AB = a, biết góc (AB, d) = 30^0.

e. Đoạn thẳng AB = a, biết góc (AB, d) = 60^0.

Nêu nhận xét về ảnh của các hình.

Bài tập 2: Nêu cách vẽ hình **H'** là ảnh của hình **H** qua phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$, biết **H** là:

a. Đường thẳng d.
b. Đoạn thẳng AB.
c. Tam giác ABC.
d. Hình bình hành ABCD.
e. Đường tròn (O, R).

Bài tập 3: Phép biến hình f biến hình **H** thành chính nó có phải là phép đồng nhất không ?

Bài tập 4: Nếu phép tịnh tiến biến hai điểm M và N lần lượt thành hai điểm M' và N' thì M'N' = MN.

Bài tập 5: Phép tịnh tiến biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.

Từ đó, chứng minh rằng phép tịnh tiến biến:

a. Đường thẳng thành đường thẳng.
b. Tia thành tia.
c. Đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó.
d. Tam giác thành tam giác bằng nó.
e. Đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.
f. Góc thành góc bằng nó.

Bài tập 6: Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy, tìm toạ độ điểm M' là ảnh của điểm M(x; y) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ (a; b).

CHỦ ĐỀ 2 PHÉP TỊNH TIẾN VÀ PHÉP DỜI HÌNH

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. ĐỊNH NGHĨA PHÉP TỊNH TIẾN

Định nghĩa: *Phép tịnh tiến vectơ* $\vec{v}$, *kí hiệu* $T_{\vec{v}}$ *là một phép dời hình biến điểm* M *thành* M' *sao cho* $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.

2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA PHÉP TỊNH TIẾN

Định lí 1: *Nếu phép tịnh tiến biến hai điểm* M *và* N *lần lượt thành hai điểm* M' *và* N' *thì* M'N' = MN.

Ý nghĩa của định lí 1 là "*Phép tịnh tiến không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kì*"

Định lí 2: *Phép tịnh tiến biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.*

Hệ quả: *Phép tịnh tiến biến:*

- *Đường thẳng thành đường thẳng.*
- *Tia thành tia.*
- *Đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó.*
- *Tam giác thành tam giác bằng nó.*
- *Đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.*
- *Góc thành góc bằng nó.*

3. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA PHÉP TỊNH TIẾN

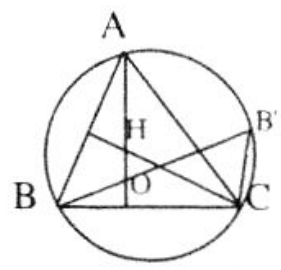
Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy, phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ (a; b) biến điểm M(x; y) thành điểm M'(x'; y') với:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}.$$

4. ỨNG DỤNG CỦA PHÉP TỊNH TIẾN

Bài toán 1: *Cho hai điểm* B *và* C *cố định trên đường tròn* (O, R) *và một điểm* A *thay đổi trên đường tròn đó. Chứng minh rằng trực tâm tam giác* ABC *nằm trên một đường tròn cố định.*

Giải



Nếu BC là đường kính thì trực tâm H của ΔABC chính là A. Vậy H nằm trên đường tròn cố định (O, R).

Nếu BC không phải là đường kính, vẽ đường kính BB' của đường tròn.

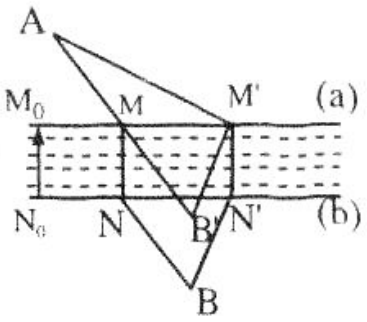
Dễ thấy rằng nếu H là trực tâm của ΔABC thì $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C}$.

Như vậy, phép tịnh tiến theo vectơ cố định $\overrightarrow{B'C}$ biến điểm A thành điểm H. Do đó, khi A thay đổi trên (O; R) thì trực tâm H luôn nằm trên đường tròn cố định là ảnh của đường tròn (O; R) qua phép tịnh tiến nói trên.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, bài toán trên đã minh hoạ việc sử dụng ***phép tịnh tiến*** để tìm quỹ tích điểm. Và đó là một trong số những ứng dụng điển hình của phép tịnh tiến.

Bài toán 2: *Hai thôn nằm ở hai vị trí* A *và* B *cách nhau một con sông (xem rằng hai bờ sông là hai đường thẳng song song).*

Người ta dự định xây một chiếc cầu MN *bắc qua sông (tất nhiên cầu phải vuông góc với bờ sông) và đắp hai đoạn thẳng từ* A *đến* M *và từ* B *đến* N. *Hãy xác định vị trí của chiếc cầu* MN *sao cho* AM + BN *ngắn nhất.*



✍ *Giải*

Lấy điểm $M_0 \in$ (a) ta có duy nhất điểm $N_0 \in$ (b) sao cho $M_0N_0 \perp$ (a) và $M_0N_0 \perp$ (b).

Gọi $B' = T_{\overrightarrow{N_0M_0}}$ và $M = AB' \cap$ (a), khi đó với điểm M' bất kì thuộc (a) tương ứng với điểm N' thuộc (b) (sao cho $M'N' \perp$ (a)) ta có:

Ta có:

$$M'A + N'B = M'A + M'B \geq AB' = MA + MB' = MA + NB.$$

Tức là AM + BN ngắn nhất.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, bài toán trên đã minh hoạ việc sử dụng ***phép tịnh tiến*** để thực hiện yêu cầu tối ưu (*tìm điểm*). Và đó cũng là một trong số những ứng dụng điển hình của phép tịnh tiến.

5. PHÉP DỜI HÌNH

Định nghĩa: *Phép dời hình là một phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ.*

Định lí: *Phép dời hình biến:*

- *Phép dời hình biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng, ba điểm không thẳng hàng thành ba điểm không thẳng hàng.*
- *Đường thẳng thành đường thẳng.*
- *Tia thành tia.*
- *Đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó.*
- *Tam giác thành tam giác bằng nó.*
- *Đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.*
- *Góc thành góc bằng nó.*

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

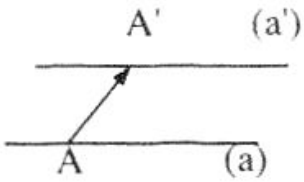
Vấn đề 1: TÌM VECTƠ TỊNH TIẾN $\vec{v}$ BIẾN HÌNH (H_1) THÀNH HÌNH (H_2)

Phương pháp áp dụng

Sử dụng định nghĩa và tính chất của phép tịnh tiến.

☞ *Chú ý*: Chúng ta sẽ gặp một yêu cầu tương tự đối với phép dời hình.

Ví dụ 1: (Bài 2/tr 9 – Sgk): *Cho hai đường thẳng song song* (a) *và* (a'). *Tìm tất cả các phép tịnh tiến biến* (a) *thành* (a').



✍ *Giải*

Mọi phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{AA'}$ với $A \in (a)$ và $A' \in (a')$ đều biến đường thẳng (a) thành (a').

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, với hai đường thẳng song song (a), (b) chúng ta có vô số các phép tịnh tiến biến (a) thành (b) và ngược lại. Các em học sinh hãy thực hiện thêm các yêu cầu sau:

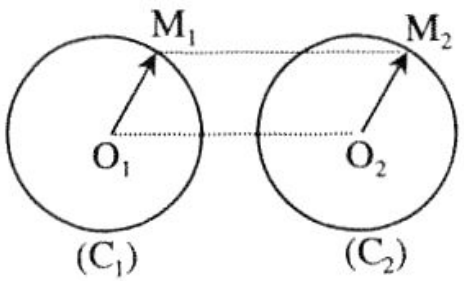
a. Tìm các phép tịnh tiến biến đoạn thẳng AB thành đoạn thẳng CD, với ABCD là hình bình hành.

b. Cho bốn đường thẳng (a), (b), (a'), (b') trong đó (a) cắt (b), (a) // (a') và (b) // (b'). Tìm phép tịnh tiến biến (a) thành (a') và biến (b) thành (b').

Ví dụ 2: *Cho hai đường tròn* (C_1) *và* (C_2) *lần lượt có tâm* O_1, O_2 *và đều có bán kính* R. *Tìm phép tịnh tiến biến* (C_1) *thành* (C_2).

✍ *Giải*

Lấy M_1 tuỳ ý thuộc (C_1) và gọi M_2 là ảnh của M qua $T_{\overrightarrow{O_1O_2}}$, ta có:



$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{O_1O_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{O_1M_1} = \overrightarrow{O_2M_2}$$

$$\Rightarrow O_2M_2 = R \Leftrightarrow M_2 \in (C_2)$$

Ngược lại: lấy M_2 là một điểm tuỳ ý thuộc (C_2) và gọi M_1 là tạo ảnh của nó qua $T_{\overrightarrow{O_1O_2}}$, ta có:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{O_1O_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{O_1M_1} = \overrightarrow{O_2M_2} \Rightarrow O_1M_1 = R \Leftrightarrow M_1 \in (C_1)$$

Vậy, ta thấy (C_2) là ảnh của (C_1) qua phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{O_1O_2}}$.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, với hai đường tròn phân biệt (C_1), (C_2) có cùng bán kính chúng ta có duy nhất phép tịnh tiến biến (C_1) thành (C_2) và ngược lại. Câu hỏi đặt ra là "*Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến đường tròn* (C) *thành chính nó* ?"

Ví dụ 3: (Bài 12/tr 6 – Sbt): *Cho hai tam giác bằng nhau* ABC *và* A'B'C' (AB = A'B', BC = B'C', CA = C'A'). *Chứng minh rằng có không quá một phép dời hình biến* ΔABC *thành* ΔA'B'C'.

✍ *Giải*

Giả sử tồn tại hai phép dời hình khác nhau F_1, F_2 cùng thoả mãn:

$F_1(\Delta ABC) = \Delta A'B'C'$, $F_2(\Delta ABC) \neq \Delta A'B'C'$.

Khi đó:

$\exists M: F_1(M) = M_1, F_2(M) = M_2$ và $M_1 \neq M_2$.

Vì F là phép dời hình nên:

$$\begin{cases} AM = A'M_1 \\ AM = A'M_2 \end{cases} \Rightarrow A'M_1 = A'M_2 \Rightarrow A' \text{ thuộc đường trung của đoạn } M_1M_2.$$

Tương tự, ta cũng thấy B', C' thuộc đường trung của đoạn M_1M_2, suy ra:

$\Rightarrow$ A', B', C' thẳng hàng – mâu thuẫn.

Vậy, tồn tại duy nhất một phép dời hình biến ΔABC thành ΔA'B'C'.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để thực hiện ví dụ trên chúng ta đã sử dụng phương pháp phản chứng để giải, các em học sinh hãy ghi nhớ các bước khi sử dụng phương pháp này.

Ví dụ 4: (Bài 16/tr 7 – Sbt): *Có hay không một phép dời hình* F *sao cho mọi đường thẳng đều biến thành đường thẳng song song với nó.*

✍ *Giải*

Giả sử tồn tại phép dời hình F thoả mãn điều kiện đầu bài. Khi đó, sẽ không tồn tại điểm M để F(M) = M vì nếu trái lại thì với đường thẳng (a) đi qua M ta có F(a) = (a') và cả hai đường thẳng sẽ không thể song song bởi cùng đi qua điểm M.

Từ nhận xét trên với điểm A bất kì, giả sử:

$$\begin{cases} F(A) = A_1 \\ F(A_1) = A_2 \end{cases} \Rightarrow F(AA_1) = F(A_1A_2)$$

tức F biến đường thẳng (a) đi qua hai điểm phân biệt A, A_1 thành đường thẳng (a') đi qua hai điểm phân biệt A_1, A_2 và chúng cắt nhau tại A_1, vô lí.

Vậy, không tồn tại phép dời hình thoả mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Chú ý***: Trong lời giải của ví dụ trên điểm mấu chốt là chứng minh nhận định "$\exists M: F(M) = M$".

Vấn đề 2: GIẢI BÀI TOÁN ĐỊNH TÍNH

Phương pháp áp dụng

Ta thường gặp các dạng yêu cầu sau:

Dạng 1: Chứng minh $(\mathbf{H}_1)$ là ảnh của $(\mathbf{H}_2)$ qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}$, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy điểm M_1 tuỳ ý thuộc $(\mathbf{H}_1)$, ta đi chứng minh $M_2 = T_{\vec{v}}(M_1) \in (\mathbf{H}_2)$.

Bước 2: Ngược lại, lấy điểm M_2 tuỳ ý thuộc $(\mathbf{H}_2)$, ta đi chứng minh $M_1 = T_{\vec{v}}(M_2) \in (\mathbf{H}_1)$.

Dạng 2: Chứng minh tính chất K, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định một hoặc nhiều phép tịnh tiến để thiết lập mối liên kết giữa các yếu tố.

Bước 2: Sử dụng các tính chất của phép tịnh tiến để giải các yêu cầu của bài toán.

☞ *Chú ý*: Chúng ta sẽ gặp một yêu cầu tương tự đối với phép dời hình.

Ví dụ 1: (Bài 3/tr 9 – Sgk): *Cho phép tịnh tiến* $T_{\vec{u}}$ *theo* $\vec{u}$ *và phép tịnh tiến* $T_{\vec{v}}$ *theo* $\vec{v}$. *Với điểm* M *bất kì,* $T_{\vec{u}}$ *biến* M *thành điểm* M', $T_{\vec{v}}$ *biến* M' *thành* M". *Chứng tỏ rằng phép biến hình biến điểm* M *thành* M" *là một phép tịnh tiến.*

✍ *Giải*

Đặt $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$, ta có nhận xét:

$$\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = \vec{u} + \vec{v} = \vec{a}$$

Vậy, phép biến hình biến M thành M" là một phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{a}$.

☞ ***Nhận xét***: Trong ví dụ trên phép tịnh tiến $T_{\vec{a}}$ được gọi là ***tích*** (hoặc ***hợp thành***) của hai phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ và $T_{\vec{v}}$. Các em học sinh hãy thực hiện thêm các yêu cầu sau:

a. Chứng tỏ rằng tích của n phép tịnh tiến là một phép tịnh tiến.

b. (Bài 6/tr 6 – Sbt): Tìm các vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ khác vectơ $\vec{0}$ để tích của hai phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ và $T_{\vec{v}}$ là một phép đồng nhất.

c. Chứng tỏ rằng tích của hai hay nhiều phép dời hình là một phép dời hình.

Ví dụ 2: (Bài 15/tr 7 – Sbt): *Chứng minh rằng phép dời hình* F *biến mỗi đường thẳng* (a) *thành đường thẳng* (a') *vuông góc với* (a) *thì có một điểm duy nhất biến thành chính nó qua phép* F.

✍ *Giải*

Trước tiên, sẽ không tồn tại hai điểm phân biệt biến thành chính nó qua F bởi khi đó (a) sẽ trùng với (a').

Gọi I là giao điểm của (a) với (a'), ta đi chứng minh F(I) = I.

Thật vậy, với A khác I giả sử:

$$\begin{cases} F(A) = A_1 \in (a') \\ F(A_1) = A_2 \\ F(A_2) = A_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AA_1A_2A_3 \text{ là hình vuông tâm I} \\ F(AA_2) = A_1A_3 \end{cases} \Rightarrow F(I) = I, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 3: (Bài 9/tr 6 – Sbt): *Cho ba điểm* A, B, C *không thẳng hàng. Chứng tỏ rằng phép dời hình biến mỗi điểm* A, B, C *thành chính nó phải là phép đồng nhất.*

✍ *Giải*

Với phép dời hình F, thoả mãn:

$F(A) = A, F(B) = B, F(C) = C.$

Giả sử trái lại F không phải là phép đồng nhất, tức là:

$\exists M: F(M) = M'$ và $M \neq M'$.

Vì F là phép dời hình nên:

$$\begin{cases} AM = AM' \\ BM = BM' \\ CM = CM' \end{cases} \Rightarrow A, B, C \text{ thuộc đường trung trực của đoạn } MM'$$

$\Rightarrow$ A, B, C thẳng hàng – mâu thuẫn.

Vậy F phải là một phép đồng nhất.

Ví dụ 4: *Giả sử phép dời hình* f *biến* ΔABC *thành* $\Delta A'B'C'$. *Chứng minh rằng:*

a. *Trọng tâm* ΔABC *biến thành trọng tâm* $\Delta A'B'C'$.

b. *Trực tâm* ΔABC *biến thành trực tâm* $\Delta A'B'C'$.

c. *Tâm đường tròn ngoại tiếp (nội tiếp)* ΔABC *biến thành tâm đường tròn ngoại tiếp (nội tiếp)* $\Delta A'B'C'$.

✍ *Giải*

a. Gọi M là trung điểm của đoạn BC và G là trọng tâm ΔABC. Giả sử:

$f(M) = M'$ và $f(G) = G'$.

Từ tính chất không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm, ta suy ra:

M' là trung điểm của $B'C' \Rightarrow A'M'$ là trung tuyến. (1)

$$\frac{2}{3} = \frac{AG}{AM} = \frac{A'G'}{A'M'}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra G' là trọng tâm $\Delta A'B'C'$.

b. Gọi AA_1, BB_1 là hai đường cao của ΔABC và H là trực tâm ΔABC. Giả sử:

$f(B_1) = B_1'$, $f(A_1) = A_1'$ và $f(H) = H'$.

- Từ tính chất của phép dời hình, ta suy ra:

$H' = A_1A_1' \cap B_1B_1'$. (3)

- Từ tính chất bảo toàn độ lớn góc của phép dời hình, ta suy ra:

A_1A_1', B_1B_1' là các đường cao của $\Delta A'B'C'$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra H' là trực tâm $\Delta A'B'C'$.

c. Ta lần lượt xét:

- Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Giả sử:

$f(O) = O'$.

Từ tính chất không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm, ta suy ra:

$O'A' = O'B' = O'C'$ bởi $OA = OB = OC$.

Vậy, điểm O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta A'B'C'$.

- Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC. Giả sử:

$f(I) = I'$.

Từ tính chất bảo toàn độ lớn góc của phép dời hình, ta suy ra:

$\widehat{I'A'B'} = \widehat{I'A'C'} \Rightarrow$ I thuộc đường phân giác của góc $\hat{A}'$. (5)

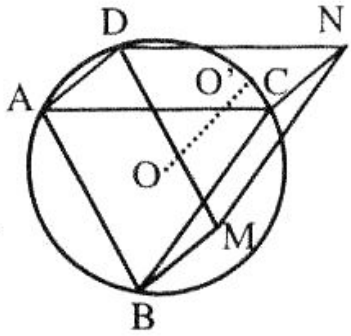
$\widehat{I'B'A'} = \widehat{I'B'C'} \Rightarrow$ I thuộc đường phân giác của góc $\hat{B}'$. (6)

Từ (5) và (6) suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta A'B'C'$.

☞ *Chú ý*: Các ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ việc sử dụng phép tịnh tiến để chứng minh tính chất hình học của một hình phẳng.

Ví dụ 5: (Bài 5/tr 6 – Sbt): *Cho tứ giác* ABCD *nội tiếp trong đường tròn* (O, R), *trong đó* AD = R. *Dựng các hình bình hành* DABM *và* DACN. *Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác* DMN *nằm trên* (O, R).

✍ *Giải*



Từ giả thiết, ta có:

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CN} \Rightarrow T_{\overrightarrow{AD}}(\Delta ABC) = \Delta DMN$

suy ra $T_{\overrightarrow{AD}}(O) = O'$ – là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔDMN.

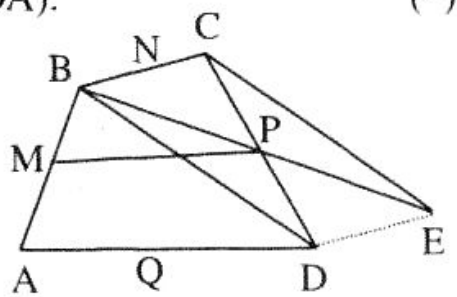
Mặt khác, ta cũng có:

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OO'} \Rightarrow OO' = R \Leftrightarrow O' \in (O, R)$, đpcm.

Ví dụ 6: *Cho tứ giác* ABCD *có* M, N, P, Q *lần lượt là trung điểm các cạnh* AB, BC, CD, DA. *Chứng minh rằng tứ giác* ABCD *là hình bình hành khi và chỉ khi*:

$$MP + NQ = \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA). \quad (*)$$

✍ *Giải*



Thực hiện phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{BC}}$: D↦ E.

Khi đó tứ giác BCED là hình bình hành, vì P là trung điểm của CD nên P cũng là trung điểm của BE.

Do đó ta có:

$$MP = \frac{1}{2}AE \le \frac{1}{2}(AD + DE) = \frac{1}{2}(AD + BC). \quad (1)$$

Dấu bằng chỉ xảy ra ⇔ A, D, E thẳng hàng ⇔ AD//BC

Chứng minh tương tự ta cũng có:

$$NQ \le \frac{1}{2}(AB + CD). \qquad (2)$$

Dấu bằng chỉ xảy ra $\Leftrightarrow$ AB//CD

Cộng theo vế (1), (2), ta được:

$$MP + NQ \le \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA). \qquad (3)$$

Vậy để có (*) thì dấu " = " xảy ra ở (3) $\Leftrightarrow$ dấu " = " xảy ra tại (1) và (2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AB // CD \\ BC // AD \end{cases} \Leftrightarrow ABCD \text{ là hình bình hành.}$$

Vấn đề 3: GIẢI BÀI TOÁN ĐỊNH LƯỢNG

Phương pháp áp dụng

Bằng việc thiết lập được các phép tịnh tiến thích hợp, ngoài việc chứng minh được các tính chất hình học ta còn có thể tính toán được các yếu tố trong một hình.

Ví dụ 1: (Bài 11/tr 6 – Sbt): *Chứng minh rằng phép dời hình biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song mà khoảng cách giữa hai đường thẳng song song đã cho bằng khoảng cách giữa các ảnh của chúng.*

✍ *Giải*

Với phép dời hình F và hai đường thẳng song song (a), (b), thoả mãn:

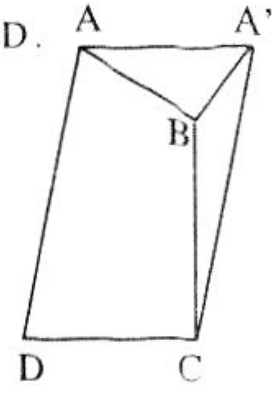
F(a) = (a') và F(b) = (b').

Gọi A, B theo thứ tự thuộc (a), (b) sao cho AB $\perp$ (a) và AB $\perp$ (b). (*)

Ta có:

$$\begin{cases} F(A) = A' \in (a') \\ F(B) = B' \in (b') \end{cases} \overset{(*)}{\Rightarrow} \begin{cases} A'B' \perp (a') \\ A'B' \perp (b') \\ A'B' = AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a') // (b') \\ A'B' = AB \end{cases}, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 2: *Tứ giác* ABCD *có* AB = $\sqrt{3}$, BC = 3, CD = $2\sqrt{3}$ và $B\hat{A}D = C\hat{D}A = 60^0$. *Tìm số đo các góc* $A\hat{B}C$ *và* $B\hat{C}D$.



✍ *Giải*

Xét phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{DC}}$: A $\mapsto$ A', khi đó tứ giác ADCA' là hình bình hành và $B\hat{A}A' = 60^0$.

Trong $\Delta ABA'$, ta có:

$B\hat{A}A' = 60^0$,

AA' = 2AB.

Do đó, $\Delta ABA'$ vuông tại B và $\widehat{BA'A} = 30^0$, $A'B = 3$.

Vì $A'B = BC = 3$ nên $\Delta BCA'$ cân tại B, do đó:

$\widehat{BCA'} = \widehat{BA'C} = \widehat{AA'C} - \widehat{BA'C} = 60^0 - 30^0 = 90^0$.

$\widehat{ABC} = 360^0 - (\widehat{BAD} + \widehat{CDA} + \widehat{BCD})$

$= 360^0 - (60^0 + 60^0 + 90^0) = 150^0$.

Ví dụ 3: *Từ đỉnh* B *của hình bình hành* ABCD *kẻ các đường cao* BK *và* BH *của nó. Biết rằng* KH = a, BD = b. *Tính khoảng cách từ* B *đến trực tâm* E *của* ΔBHK *theo* a *và* b.

✍ *Giải – Bạn đọc tự vẽ hình*

Ta có:

EH // KD (cùng vuông góc với BK)

EH // HD (cùng vuông góc với BH)

Do đó EHDK là hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{KD}$

Thực hiện phép tịnh tiến vectơ $\overrightarrow{KD}$, ta có $K \mapsto D$; $E \mapsto H$ và $B \mapsto P$

Suy ra:

- Tứ giác BPDK là hình chữ nhật $\Rightarrow PK = BD = b$
- PH // BE mà $BE \perp HK$ nên $PH \perp HK$

Xét tam giác vuông PHK, ta có:

$PH = \sqrt{PK^2 - KH^2} = \sqrt{b^2 - a^2}$.

Mà BE = PH nên $BE = \sqrt{b^2 - a^2}$.

Vấn đề 4: TÌM TẬP HỢP ĐIỂM M

Phương pháp áp dụng

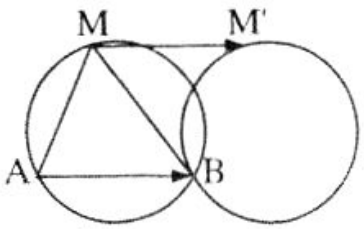
Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm một phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$, biến điểm E di động thành điểm M.

Bước 2: Tìm tập hợp (**H**) của các điểm E.

Bước 3: Vậy tập hợp các điểm M là ảnh của (**H**) trong phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$.

Ví dụ 1: (Bài 4/tr 9 – Sgk): *Cho đường tròn* (O) *và hai điểm* A *và* B. *Một điểm* M *thay đổi trên đường tròn* (O). *Tìm quỹ tích điểm* M' *sao cho* $\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$.



✍ *Giải*

Từ giả thiết, ta có:

$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB}$.

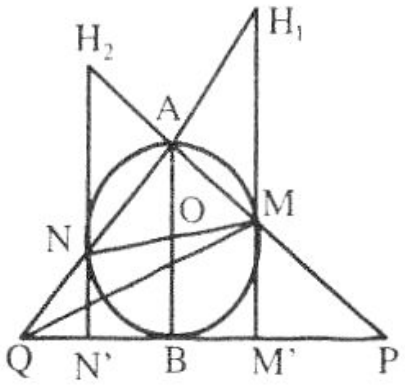
Tức là M' là ảnh của điểm M qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AB}$.

Vậy, quỹ tích điểm M' là đường tròn (O') là ảnh của đường tròn (O) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AB}$.

Ví dụ 2: (Bài 3/tr 6 – Sbt): *Cho đường tròn* (O) *với đường kính* AB *cố định, một đường kính* MN *thay đổi. Các đường thẳng* AM *và* AN *cắt tiếp tuyến tại* B *lần lượt tại* P, Q. *Tìm quỹ tích trực tâm các tam giác* MPQ *và* NPQ.

Giải

Ta lần lượt:



- Gọi H_1 là trực tâm ΔMPQ, suy ra H_1 chính là giao điểm của hai đường cao MM' và NQ (tức AQ). Ta có:

 $MM' // AB \Rightarrow MH_1 // OA$

 $\Rightarrow$ OA là đường trung bình của ΔMNH_1

 $\Rightarrow MH_1 = 2OA \Rightarrow \overrightarrow{MH_1} = \overrightarrow{AB}$

 $\Rightarrow H_1 = T_{\overrightarrow{AB}}(M)$.

 Và vì M chạy trên (O) nên H_1 chạy trên đường tròn $(O_1) = T_{\overrightarrow{AB}}((O))$.

- Gọi H_2 là trực tâm ΔNPQ, suy ra H_2 chính là giao điểm của hai đường cao NN' và MP (tức AP). Ta có:

 $NN' // AB \Rightarrow NH_2 // OA$

 $\Rightarrow$ OA là đường trung bình của ΔMNH_2

 $\Rightarrow NH_2 = 2OA \Rightarrow \overrightarrow{NH_2} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow H_2 = T_{\overrightarrow{AB}}(N)$.

 Và vì N chạy trên (O) nên H_2 chạy trên đường tròn $(O_1) = T_{\overrightarrow{AB}}((O))$.

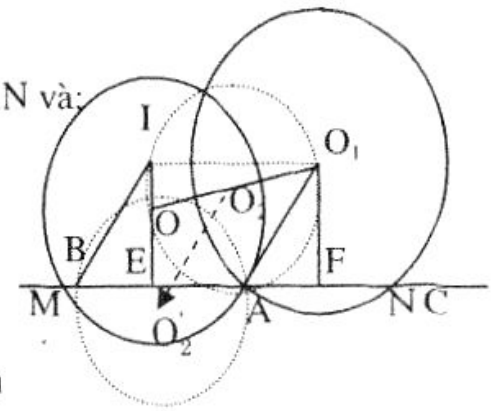
Ví dụ 3: *Cho hai đường tròn* (O) *và* (O_1) *cắt nhau tại hai điểm, gọi* A *là một giao điểm. Đường thẳng* (d) *di động qua* A *và cắt hai đường tròn đã cho tại* M *và* N. *Trên hai tia* AM *và* AN *lấy hai điểm* B *và* C *sao cho* $2\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MN}$. *Tìm quỹ tích các điểm* B *và* C.

Giải

Dựng OE và O_1F vuông góc với (d),

Ta có E, F lần lượt là trung điểm các đoạn AM, AN và:

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{NA}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC}$$



Dựng O_1I vuông góc với OE, khi đó tứ giác O_1IEG là hình chữ nhật

Từ đó suy ra:

$\overrightarrow{O_1I} = \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow O_1ABI$ là hình bình hành

$\Rightarrow \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{O_1A} \Rightarrow B = T_{\overrightarrow{O_1A}}(I)$.

Vì O'IO vuông nên tập hợp các điểm I là đường tròn (O_2) đường kính OO_1, từ đó suy ra tập hợp các điểm B là đường tròn (O'_2) với:

$(O'_2) = T_{\overrightarrow{O_1A}}[(O_2)]$.

Tương tự ta có tập hợp điểm C là đường tròn (O'_3) với:

$(O'_3) = T_{\overrightarrow{OA}}[(O_2)]$.

Vấn đề 5: DỰNG HÌNH

Phương pháp áp dụng

Ta thường thực hiện theo 4 bước đã biết.

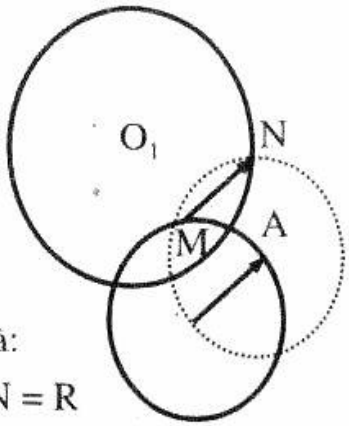
Ví dụ 1: (Bài 4/tr 6 – Sbt): *Cho hai đường tròn không đồng tâm* (O, R), (O_1, R_1) *và điểm* A *trên* (O, R). *Xác định điểm* M *trên* (O, R) *và điểm* N *trên* (O_1, R_1) *sao cho* $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{OA}$.

Giải

Phân tích: Giả sử đã dựng được hai điểm M, N thoả mãn điều kiện đầu bài, suy ra:

$N = T_{\overrightarrow{OA}}(M) \Rightarrow N \in (A, R) = T_{\overrightarrow{OA}}((O, R))$,

tức N là giao điểm của hai đường tròn (A, R) và (O_1, R_1).



Cách dựng: Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng (A, R).
- Xác định giao điểm N của (A, R) và (O_1, R_1).
- Dựng $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{OA}$.

Chứng minh: Theo cách dựng ta có ngay N thuộc (O_1, R_1) và:

$MN // OA \Rightarrow$ OANM là hình bình hành $\Rightarrow OM = AN = R$

$\Rightarrow M \in (O, R)$.

Biện luận: Bài toán có nghiệm hình phụ thuộc vào số giao điểm của hai đường tròn (A, R) và (O_1, R_1).

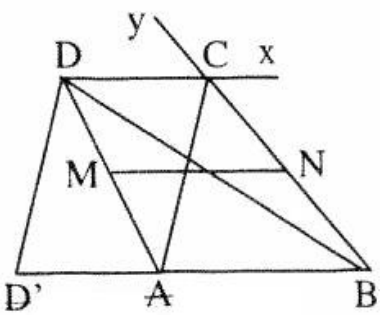
Ví dụ 2: *Dựng hình thang* ABCD (AB//CD) *biết hai đường chéo* AC = a, BD = b, *góc* $ABC = \alpha$ *và đường trung bình* MN = c.

Giải

Phân tích: Giả sử đã dựng được hình thang ABCD thoả mãn điều kiện đầu bài.

Thực hiện phép tịnh tiến:

$T_{\overrightarrow{CA}} : D \mapsto D'$



khi đó tứ giác ACDD' là hình bình hành nên ta có:

$BD' = BA + AD' = AB + DC = 2MN = 2c$

$\Rightarrow \Delta BDD'$ dựng được, (biết 3 cạnh).

Cách dựng: Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng $\Delta BDD'$ với $BD' = 2c$, $BD = b$, $DD' = a$

- Dựng Dx // BD'
- Dựng By hợp với BD' góc α, By cắt Dx tại C.
- Dựng Cz // DD', Cz cắt BD'' tại A

Thì tứ giác ABCD là hình thang cần dựng.

Chứng minh: Theo cách dựng ta có:

- CD//AB nên ABCD là hình thang; BD = b, góc ABC = α
- AC = DD' = a (do ACDD' là hình bình hành) và:

$$MN = \frac{1}{2}(AB + DC) = \frac{1}{2}(AB + AD') = \frac{1}{2}BD' = c$$

Biện luận: Bài toán có nghiệm hình:

$\Leftrightarrow \Delta BDD'$ dựng được $\Leftrightarrow |a - b| < 2c < a + b$.

Vấn đề 6: HỆ TOẠ ĐỘ ĐỐI VỚI PHÉP TỊNH TIẾN

Phương pháp áp dụng

Ta trình bày phương pháp thực hiện hai dạng toán

Dạng 1: Xác định điểm M_1 là ảnh của điểm $M_0(x_0; y_0)$ qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}(a; b)$.

Khi đó, toạ độ điểm $M_1(x; y)$ được cho bởi:

$$\begin{cases} x = a + x_0 \\ y = b + y_0 \end{cases}.$$

Dạng 2: Tìm phương trình của hình (H_1) là ảnh của hình (H): $f(x, y) = 0$ qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}(a; b)$.

Khi đó, mỗi điểm $M(x; y) \in (H_1)$ là ảnh của một điểm $M_0(x_0; y_0) \in (H)$ qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}(a; b)$, ta có:

$$\begin{cases} M_0(x_0; y_0) \in (H) \\ x = x_0 + a \\ y = y_0 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x_0; y_0) = 0 \\ x_0 = x - a \\ y_0 = y - b \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x - a, y - b) = 0. \qquad (*)$$

Phương trình (*) chính là phương trình của (H_1).

☞ ***Chú ý***: Với dạng toán 2 chúng ta còn có thể sử dụng tính chất đặc thù của phép tịnh tiến để giải, cụ thể:

a. Để tìm phương trình đường thẳng (d_1) là ảnh của đường thẳng (d) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ chúng ta có thể thực hiện thêm theo các cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy hai điểm phân biệt A, B thuộc (d).

Bước 2: Sử dụng công thức xác định toạ độ của các điểm A_1, B_1, biết $A_1 = T_{\vec{v}}(A)$, $B_1 = T_{\vec{v}}(B)$.

Bước 3: Viết phương trình đường thẳng (d_1) đi qua hai điểm A_1, B_1.

Cách 2: Sử dụng tính chất (d_1) song song với (d), ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy điểm A thuộc (d).

Bước 2: Sử dụng công thức xác định toạ độ của điểm A_1, biết $A_1 = T_{\vec{v}}(A)$.

Bước 3: Viết phương trình đường thẳng (d_1) đi qua A_1 và song song với (d).

b. Để tìm phương trình đường tròn (C_1) là ảnh của đường tròn (C) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ chúng ta có thể thực hiện theo cách sau:

Bước 1: Xác định toạ độ tâm I và bán kính R của (C).

Bước 2: Sử dụng công thức xác định toạ độ của điểm I_1, biết $I_1 = T_{\vec{v}}(I)$.

Bước 3: Viết phương trình đường tròn $(C_1) = (I, R)$.

Ví dụ 1: *Trong mặt phẳng toạ độ* Oxy, *tìm toạ độ của điểm* M_1 *là ảnh của điểm* $M_0(2; -1)$ *qua phép tịnh tiến vectơ* $\vec{v}(2; 1)$.

Giải

Giả sử $M_1(x; y)$, ta có:

$$\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 2 \\ y + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow M_1(4; 0).$$

Vậy, ta được $M_1(4; 0)$.

Nhận xét: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên chúng ta đã sử dụng định nghĩa của phép tịnh tiến để tìm toạ độ điểm M_1.

Ví dụ 2: *Trong mặt phẳng toạ độ* Oxy, *tìm phương trình của đường thẳng* (d_1) *là ảnh của đường thẳng* (d) *qua phép tịnh tiến vectơ* $\vec{v}$, *biết*:

a. (d): $x + 3y - 2 = 0$ *và* $\vec{v}(1; 1)$.

b. (d): $2x + y - 2009 = 0$ *và* $\vec{v}(1; -2)$.

Giải

a. Ta có ba cách trình bày sau:

Cách 1: Lấy điểm $A(2; 0) \in (d)$ và gọi $A_1 = T_{\vec{v}}(A)$, ta có:

$$A_1: \begin{cases} x = 2 + 1 = 3 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A_1(3; 1).$$

Khi đó, phương trình đường thẳng (d_1) được xác định bởi:

$$(d_1): \begin{cases} \text{qua } A_1(3;1) \\ (d_1)//(d) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \begin{cases} \text{qua } A_1(3;1) \\ (d_1): x + 3y + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): x + 3y - 6 = 0.$$

Cách 2: Lấy hai điểm A(2; 0) và B(−1; 1) thuộc (d) và gọi:

$$A_1 = T_{\vec{v}}(A) \Rightarrow A_1: \begin{cases} x = 2 + 1 = 3 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A_1(3;\ 1).$$

$$B_1 = T_{\vec{v}}(B) \Rightarrow B_1: \begin{cases} x = -1 + 1 = 0 \\ y = 1 + 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow B_1(0;\ 2).$$

Khi đó, phương trình đường thẳng (d_1) được xác định bởi:

$$(d_1): \begin{cases} \text{qua } A_1(3;1) \\ \text{qua } B_1(0;2) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \frac{x-3}{0-3} = \frac{y-1}{2-1} \Leftrightarrow (d_1): x + 3y - 6 = 0.$$

Cách 3: Mỗi điểm $M(x;\ y) \in (d_1)$ là ảnh của một điểm $M_0(x_0,\ y_0) \in (d)$ qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}\ (1;\ 1)$, ta có:

$$\begin{cases} M_0(x_0;y_0) \in (d) \\ \overrightarrow{M_0M} = \vec{v} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 3y_0 - 2 = 0 \\ x - x_0 = 1 \\ y - y_0 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x - 1) + 3(y - 1) - 2 = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 6 = 0. \qquad (*)$$

Phương trình (*) chính là phương trình của (d_1).

b. Nhận xét rằng đường thẳng (d) có vectơ chỉ phương (vtcp) là chính $\vec{v}\ (1;\ -2)$ nên phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ biến (d) thành chính nó.

Do đó, ảnh của (d) cũng có phương trình $2x + y - 2009 = 0$.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để thực hiện bài toán trên trong câu a:

- ***Ở cách 1***, chúng ta đã sử dụng tính chất của phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.
- ***Ở cách 2***, chúng ta đã sử dụng điều kiện xác định một đường thẳng (cụ thể qua hai điểm phân biệt có duy nhất một đường thẳng).
- ***Ở cách 3***, chúng ta đã sử dụng phương pháp quỹ tích.

Ví dụ 3: *Trong mặt phẳng toạ độ* Oxy, *tìm phương trình của đường thẳng* (d_1) *là ảnh của đường thẳng* (d) *qua phép tịnh tiến vectơ* $\vec{v}$, *biết*:

a. (d): $4x - 2y - 2011 = 0$ *và* $\vec{v}\ (-1;\ -2)$.

b. (d): $3x - 4y + 1 = 0$ *và* $\vec{v}$ *có độ dài bằng* $\sqrt{5}$ *đồng thời có giá tạo với đường thẳng* (d) *một góc có sin bằng* $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

✍ *Giải*

a. Nhận xét rằng đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(2;\ 4)$ cùng phương với $\vec{v}\ (-1;\ -2)$ nên phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ biến (d) thành chính nó.

Do đó, ảnh của (d) cũng có phương trình $4x - 2y - 2011 = 0$.

b. Đường thẳng (d) đi qua điểm A(−1; 1), có vtcp $\vec{u}(4;3)$ và giả sử vectơ $\vec{v}(a;b)$, ta lần lượt có:

$$|\vec{v}| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow a^2+b^2 = 5. \quad (1)$$

$$\sin((d), g_{\vec{v}}) = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \sin(\vec{u},\vec{v}) = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \cos(\vec{u},\vec{v}) = \pm\sqrt{1-\frac{4}{5}} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Khi đó, ta lần lượt:

- Với $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{1}{\sqrt{5}}$, ta được:

$$\frac{4a+3b}{\sqrt{4^2+3^2}.\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{4a+3b}{\sqrt{4^2+3^2}.\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow 4a+3b = 5. \quad (2)$$

Giải hệ tạo bởi (1) và (2), ta được $a = 2$ hoặc $a = -\frac{2}{5}$.

– Với $a = 2$ thì $b = -1$ nên $\vec{v}(2;-1)$, suy ra $T_{\vec{v}}(A) = \{A_1(1;0)\}$.

Từ đó, suy ra:

$$(d_{1,1}): \begin{cases} \text{qua } A_1(1;0) \\ \text{vtcp } \vec{u}(4;3) \end{cases} \Leftrightarrow (d_{1,1}): 3x-4y-3 = 0.$$

– Với $a = -\frac{2}{5}$ thì $b = \frac{11}{5}$ nên $\vec{v}\left(-\frac{2}{5};\frac{11}{5}\right)$, suy ra $T_{\vec{v}}(A) = \left\{A_1\left(-\frac{7}{5};\frac{16}{5}\right)\right\}$.

Từ đó, suy ra:

$$(d_{1,2}): \begin{cases} \text{qua } A_1\left(-\frac{7}{5};\frac{16}{5}\right) \\ \text{vtcp } \vec{u}(4;3) \end{cases} \Leftrightarrow (d_{1,2}): 3x-4y+17 = 0.$$

- Với $\cos(\vec{u},\vec{v}) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ – *Bạn đọc tự thực hiện.*

Ví dụ 4: *Trong mặt phẳng toạ độ* Oxy, *tìm phương trình của đường thẳng* (d') *là ảnh của đường thẳng* (d): $x + 2y - 3 = 0$ *lần lượt qua các phép tịnh tiến theo các vectơ* $\vec{v}$ và $\vec{u}$, *biết*:

a. $\vec{v}(1;2)$ và $\vec{u}(2;-1)$. b. $\vec{v}(2;-1)$ và $\vec{u}(4;-2)$.

c. $\vec{v}(-2;-1)$ và $\vec{u}(2;-3)$.

Giải

a. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{a}(2;-1)$ và đi qua điểm A(1; 1).

Ta có:

$$T_{\vec{v}}(A) = A_1(2;3) \text{ và } T_{\vec{u}}(A_1) = A'(4;2).$$

Khi đó, phương trình đường thẳng (d') được xác định bởi:

$$(d'): \begin{cases} \text{qua } A'(4;2) \\ (d') // (d) \end{cases} \Leftrightarrow (d'): \begin{cases} \text{qua } A'(4;2) \\ (d'): x + 2y + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (d'): x + 2y - 8 = 0.$$

Cách 2: Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{a}(2; -1)$ và đi qua điểm A(1; 1).

Ta có:

$$(d') = T_{\vec{u}}\left[T_{\vec{v}}(d)\right] = T_{\vec{v}+\vec{u}}(d) = T_{\vec{b}(3;1)}(d).$$

$T_{\vec{b}}(A) = A'(4; 2)$.

Khi đó, phương trình đường thẳng (d') được xác định bởi:

$$(d'): \begin{cases} \text{qua } A'(4;2) \\ (d') // (d) \end{cases} \Leftrightarrow (d'): \begin{cases} \text{qua } A'(4;2) \\ (d'): x + 2y + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (d'): x + 2y - 8 = 0.$$

b. Nhận xét rằng đường thẳng (d) có vtcp $\vec{a}(2; -1)$ nên cùng phương với các vectơ $\vec{v}$ và $\vec{u}$. Suy ra, phép tịnh tiến theo các vectơ $\vec{v}$ và $\vec{u}$ biến (d) thành chính nó.

Do đó, ảnh của (d) cũng có phương trình $x + 2y - 3 = 0$.

c. Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{a}(2; -1)$.

Ta có:

$$(d') = T_{\vec{u}}\left[T_{\vec{v}}(d)\right] = T_{\vec{v}+\vec{u}}(d) = T_{\vec{b}(4;-2)}(d)$$

tức đường thẳng (d) có vtcp $\vec{a}(2; -1)$ cùng phương với $\vec{b}(4; -2)$ nên phép tịnh tiến theo các vectơ $\vec{v}$ và $\vec{u}$ biến (d) thành chính nó.

Do đó, ảnh của (d) cũng có phương trình $x + 2y - 3 = 0$.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, ví dụ trên đã minh hoạ phương pháp tìm phương trình đường thẳng (d') là ảnh của đường thẳng (d) qua nhiều phép tịnh tiến. Và ở đó trong trường hợp không đặc biệt các em học sinh cần nắm vững các tính chất của phép tịnh tiến để tự đó đề xuất một lời giải gắn gọn.

Ví dụ 5: *Trong mặt phẳng toạ độ* Oxy, *tìm phương trình của đường tròn* (C_1) *là ảnh của đường tròn* (C) *qua phép tịnh tiến theo vectơ* $\vec{v}$, *biết*:

a. (C): $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ *và* $\vec{v}(2; 1)$.

b. (Bài 7.b/tr 6 – Sbt): (C): $x^2 + y^2 - 4x + y - 1 = 0$ *và* $\vec{v}(1; -2)$.

✍ *Giải*

a. Ta có hai cách trình bày sau:

Cách 1: Đường tròn (C) có tâm I(–2; 1) và bán kính R = 2.

Gọi $I_1 = T_{\vec{v}}(I)$, ta có:

$$I_1: \begin{cases} x = -2 + 2 = 0 \\ y = 1 + 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow I_1(0; 2).$$

Khi đó, phương trình đường tròn (C_1) được xác định bởi:

$$(C_1):\begin{cases}\text{Tâm } I_1(0;\,2)\\ \text{Bán kính } R=2\end{cases}\Leftrightarrow (C_1):\ x^2+(y-2)^2=4.$$

Cách 2: Mỗi điểm $M(x;\,y)\in(C_1)$ là ảnh của một điểm $M_0(x_0;\,y_0)\in(C)$ qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}(2,\,1)$, ta có:

$$\begin{cases}M_0(x_0;y_0)\in(C)\\ x=x_0+2\\ y=y_0+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x_0+2)^2+(y_0-1)^2=4\\ x_0=x-2\\ y_0=y-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow (x-2+2)^2+(y-1-1)^2=4\Leftrightarrow x^2+(y-2)^2=4. \qquad (*)$$

Phương trình (*) chính là phương trình của (C_1).

b. Ta có hai cách trình bày sau:

Cách 1: Mỗi điểm $M(x;\,y)\in(C_1)$ là ảnh của một điểm $M_0(x_0;\,y_0)\in(C)$ qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}(1;\,-2)$, ta có:

$$\begin{cases}M_0(x_0;y_0)\in(C)\\ x=x_0+1\\ y=y_0-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0^2+y_0^2-4x_0+y_0-1=0\\ x_0=x-1\\ y_0=y+2\end{cases}$$

$$\Rightarrow (x-1)^2+(y+2)^2-4(x-1)+y+2-1=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-6x+5y+10=0. \qquad (*)$$

Phương trình (*) chính là phương trình của (C_1).

Cách 2: Đường tròn (C) có tâm $I\left(2;\,-\frac{1}{2}\right)$ và bán kính $R=\frac{\sqrt{21}}{2}$.

Gọi $I_1=T_{\vec{v}}(I)$, ta có:

$$I_1:\begin{cases}x=2+1=3\\ y=-\frac{1}{2}-2=-\frac{5}{2}\end{cases}\Rightarrow I_1\left(3;\,-\frac{5}{2}\right).$$

Khi đó, phương trình đường tròn (C_1) được xác định bởi:

$$(C_1):\begin{cases}\text{Tâm } I_1\left(3;\,-\frac{5}{2}\right).\\ \text{Bán kính } R=\frac{\sqrt{21}}{2}\end{cases}\quad (C_1):(x-3)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{21}{24}.$$

Ví dụ 6: (Bài 8/tr 6 – Sbt): *Trong mặt phẳng toạ độ* Oxy, *cho hai đường thẳng* (d) *và* (d') *lần lượt có phương trình*:

$$Ax+By+C=0 \text{ và } Ax+By+C'=0.$$

Tìm những vectơ $\vec{v}(a;\,b)$ *sao cho phép tịnh tiến* T *theo vectơ đó biến* (d) *thành* (d').

✍ *Giải*

Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Với mỗi điểm M(x; y) thuộc (d), ta có:

$$Ax + By + C = 0. \qquad (*)$$

$$T_{\vec{v}}(M) = M'(x + a;\ y + b) \in (d') \Rightarrow A(x + a) + B(y + b) + C' = 0$$

$$\Leftrightarrow (Ax + By + C) + Aa + Bb - C + C' = 0 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} Aa + Bb - C + C' = 0. \qquad (**)$$

Vậy, các vectơ $\vec{v}(a; b)$ thoả mãn (**) sẽ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Cách 2: Lấy các điểm tuỳ ý M(x; y), M'(x'; y') theo thứ tự thuộc (d), (d'), ta có:

$$Ax + By + C = 0. \qquad (1)$$

$$Ax' + By' + C' = 0. \qquad (2)$$

Từ đó, suy ra phép tịnh tiến theo vectơ:

$$\vec{v} = \overrightarrow{MM'}(x' - x;\ y' - y) = \overrightarrow{MM'}\left(x' - x;\ -\frac{A(x' - x) - C' + C}{B}\right)$$

sẽ thoả mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, có vô số phép tịnh tiến biến đường thẳng (d) thành đường thẳng (d') song song hoặc trùng với nó. Do đó, trong bài toán cụ thể với yêu cầu "*Tìm một vectơ* $\vec{v}(a; b)$ *sao cho phép tịnh tiến* T *theo vectơ đó biến* (d) *thành* (d')" các em học sinh chỉ cần lấy hai điểm M, M' theo thứ tự thuộc các đường thẳng (d), (d') sẽ có ngay một vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{MM'}$.

Ví dụ 7: (Bài 5/tr 9 - Sgk): *Trong mặt phẳng toạ độ* Oxy, *với* α, a, b *là những số cho trước, xét phép biến hình* F *biến mỗi điểm* M(x; y) *thành điểm* M'(x'; y'), *trong đó:*

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + a \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + b \end{cases}$$

a. *Cho hai điểm* $M(x_1; y_1)$, $N(x_2; y_2)$ *và gọi* M', N' *lần lượt là ảnh của* M, N *qua phép* F. *Hãy tìm toạ độ của* M' *và* N'.

b. *Tính khoảng cách* d *giữa* M *và* N, *khoảng cách* d' *giữa* M' *và* N'.

c. *Phép* F *có phải là phép dời hình hay không ?*

d. *Khi* $\alpha = 0$, *chứng tỏ rằng* F *là phép tịnh tiến.*

✍ *Giải*

a. Ta lần lượt có:

$M'(x_1.\cos\alpha - y_1.\sin\alpha + a;\ x_1.\sin\alpha + y_1.\cos\alpha + b)$,

$N'(x_2.\cos\alpha - y_2.\sin\alpha + a;\ x_2.\sin\alpha + y_2.\cos\alpha + b)$.

b. Ta lần lượt có:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ . \qquad (1)$$

$$(d')^2 = (M'N')^2 = [(x_2.\cos\alpha - y_2.\sin\alpha) - (x_1.\cos\alpha - y_1.\sin\alpha)]^2 +$$
$$+ [(x_2.\sin\alpha + y_2.\cos\alpha) - (x_1.\sin\alpha + y_1.\cos\alpha)]^2$$
$$= [(x_2 - x_1).\cos\alpha - (y_2 - y_1).\sin\alpha]^2 + [(x_2 - x_1).\sin\alpha + (y_2 - y_1).\cos\alpha]^2$$
$$= (x_2 - x_1)^2.\cos^2\alpha + (y_2 - y_1)^2.\sin^2\alpha + (x_2 - x_1)^2.\sin^2\alpha + (y_2 - y_1)^2.\cos^2\alpha$$
$$= (x_2 - x_1)^2.(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + (y_2 - y_1)^2.(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$$
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$
$$\Leftrightarrow d' = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (2)$$

c. Từ (1) và (2) suy ra d = d' (hay MN = M'N').

Vậy, phép biến hình F bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì nên theo định nghĩa nó là một phép dời hình.

d. Với $\alpha = 0$, ta thấy:

$$\begin{cases} x' = x\cos 0 - y\sin 0 + a \\ y' = x\sin 0 + y\cos 0 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \Rightarrow F \text{ là phép tịnh tiến.}$$

Ví dụ 8: (Bài 6/tr 9 – Sgk): *Trong mặt phẳng toạ độ* Oxy, *xét các phép biến hình sau đây*:

- *Phép biến hình* F_1 *biến mỗi điểm* M(x; y) *thành điểm* M'(y; −x).
- *Phép biến hình* F_2 *biến mỗi điểm* M(x; y) *thành điểm* M'(2x; y).

Trong hai phép biến hình trên, phép nào là phép dời hình ?

Giải

a. Phép biến hình F_1 biến hai điểm $M(x_1; y_1)$, $N(x_2; y_2)$ thành hai điểm $M'(y_1; -x_1)$, $N'(y_2; -x_2)$.

Khi đó, ta có:

$$M'N' = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (-x_2 + x_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = MN.$$

Vậy, F_1 là một phép dời hình.

b. Phép biến hình F_2 biến hai điểm $M(x_1; y_1)$, $N(x_2; y_2)$ thành hai điểm $M'(2x_1; y_1)$, $N'(2x_2; y_2)$.

Khi đó, ta có:

$$M'N' = \sqrt{(2x_2 - 2x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{4(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \neq MN.$$

Vậy, F_2 không là một phép dời hình.

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài tập 1: Qua phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$, đường thẳng (d) biến thành đường thẳng (d'). Trong trường hợp nào thì:

a. (d) trùng (d') ?

b. (d) song song với (d') ?

c. (d) cắt (d') ?

Bài tập 2: Cho hai điểm phân biệt A, B và f là một phép dời hình biến A thành A, B thành B, tức là f(A) = A, f(B) = B. Khẳng định nếu điểm M nằm trên đường thẳng AB thì f(M) = M là đúng hay sai ?

Bài tập 3: Giả sử phép dời hình f biến điểm I thành chính nó và biến mỗi điểm M khác I thành điểm M' không trùng với M.

a. Tìm những đường tròn biến thành chính nó qua phép dời hình f.

b. Chứng tỏ rằng nếu đường thẳng (a) không đi qua I thì f biến (a) thành đường thẳng (a') không trùng với (a).

Bài tập 4: Cho I là trung điểm đoạn thẳng AB và f là một phép dời hình sao cho f(A) = B, f(B) = A. Chứng minh rằng:

a. f(I) = I.

b. f biến điểm M của đường thẳng AB (M ≠ I) thành điểm M' sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng MM'.

Bài tập 5: Cho đường thẳng (a) và điểm I nằm trên nó. Gọi f là phép dời hình biến (a) thành (a) và I là điểm duy nhất biến thành chính nó. Chứng minh rằng f biến điểm M bất kì thành điểm M' sao cho I là trung điểm của MM'.

Bài tập 6: Cho tứ giác ABCD, $AB = 6\sqrt{3}$, CD = 12, $\hat{A} = 60^0$, $\hat{B} = 120^0$, $\hat{D} = 90^0$. Tính độ dài các cạnh BC và AD.

Bài tập 7: Cho ΔABC cố định. Gọi Bx, Cy theo thứ tự là các tia đối của các tia BA, CA. Các điểm D, E thứ tự chuyển động trên các tia Bx, Cy. Tìm quỹ tích các trung điểm M của DE biết BD = 2CE.

Bài tập 8: Cho hai đường tròn (O,R) và (O', R'), R≠R' và một đường thẳng (Δ). Hãy dựng một đường thẳng (d) song song với (Δ) cắt (O) và (O') lần lượt tại các điểm A, B, A', B' sao cho AB = A'B'.

Bài tập 9: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, với α cho trước, xét phép biến hình F biến mỗi điểm M(x; y) thành điểm M'(x'; y') trong đó:

$$\begin{cases} x' = x.\cos\alpha - y.\sin\alpha \\ y' = x.\sin\alpha + y.\cos\alpha \end{cases}$$

Cho hai điểm $M(x_1; y_1)$, $N(x_2; y_2)$ và gọi M', N' lần lượt là ảnh của M, N qua phép F.

a. Hãy tìm toạ độ của các điểm M', N'.

b. Tính khoảng cách d giữa M và N; khoảng cách d' giữa M' và N'.

c. Phép F có phải là phép dời hình hay không ?

Bài tập 10: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho phép biến hình f biến mỗi điểm M(x; y) thành điểm M'(x'; y') sao cho:

$$\begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = cx + dy + q \end{cases}, \text{ trong đó } a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1 \text{ và } ab + cd = 0.$$

Chứng tỏ rằng f là phép dời hình.

Bài tập 11: Tìm phương trình của đường thẳng (d_1) là ảnh của đường thẳng (d) qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}$, biết:

a. (d): $x + y - 1 = 0$ và $\vec{v}(2; 1)$.

b. (d): $2x - y + 1 = 0$ và $\vec{v}(-1; 2)$.

Bài tập 12: Tìm phương trình của đường tròn (C_1) là ảnh của đường tròn (C) qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}$, biết:

a. (C): $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ và $\vec{v}(-1; 2)$.

b. (C): $x^2 + y^2 - x + 4y - 1 = 0$ và $\vec{v}(1; 3)$.

Bài tập 13: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai đường tròn (C) và (C') lần lượt có phương trình:

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0 \text{ và } x^2 + y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

với $A^2 + B^2 - C = D^2 + E^2 - F > 0$. Tìm những vectơ $\vec{v}(a; b)$ sao cho phép tịnh tiến T theo vectơ đó biến (C) thành (C').

Bài tập 14: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho parabol (P): $y = ax^2$. Gọi T là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}(m; n)$ và (P') là ảnh của (P) qua phép tịnh tiến đó. Hãy viết phương trình của (P').

Bài tập 15: Hãy tìm vectơ $\vec{v}(a; b)$ sao cho khi tịnh tiến đồ thị $y = f(x) = x^3 + 3x + 1$ theo $\vec{v}$ ta nhận được đồ thị hàm số $y = g(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 1$.



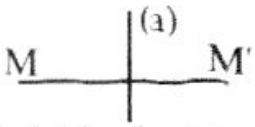
CHỦ ĐỀ 3

PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. ĐỊNH NGHĨA PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

Nhắc lại: *Điểm* M' *được gọi là đối xứng với điểm* M *qua đường thẳng* (a) *nếu* (a) *là đường trung trực của đoạn thẳng* MM'.



Trường hợp đặc biệt: *nếu* M *nằm trên* (a) *thì ta xem* M *đối xứng với chính nó qua* a.

Định nghĩa 1: *Phép đối xứng qua đường thẳng* (a) *là phép biến hình biến mỗi điểm* M *thành* M' *đối xứng với* M *qua đường thẳng* (a).

Phép đối xứng qua đường thẳng (a) thường được kí hiệu là $Đ_a$.

Vậy, ta được:

$M' = Đ_a(M) \Leftrightarrow$ (a) là trung trực đoạn MM'.

2. ĐỊNH LÍ

Định lí: *Phép đối xứng trục là phép dời hình.*

3. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy,

- Phép đối xứng qua trục Ox biến điểm M(x; y) thành điểm M'(x'; y') với:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}.$$

- Phép đối xứng qua trục Oy biến điểm M(x; y) thành điểm M'(x'; y') với:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}.$$

4. TRỤC ĐỐI XỨNG CỦA MỘT HÌNH

Định nghĩa 2: *Đường thẳng (d) được gọi là trục đối xứng của hình* **H** *nếu phép đối xứng trục* $Đ_d$ *biến* **H** *thành chính nó, tức là* $Đ_d(\mathbf{H}) = \mathbf{H}$.

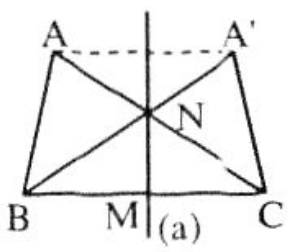
B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: TÌM PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC BIẾN HÌNH (H_1) THÀNH HÌNH (H_2)

Phương pháp áp dụng

Sử dụng định nghĩa và tính chất của phép đối xứng trục.

Ví dụ 1: *Hình bên là ảnh của* ΔABC *qua phép đối xứng với trục là đường trung trực của cạnh* BC.



Ta thấy:

$A' = Đ_a(A)$; $C = Đ_a(B)$; $B = Đ_a(C)$

$\Rightarrow \Delta A'CB = Đ_a(\Delta ABC)$.

$M = Đ_a(M)$; $N = Đ_a(N)$.

ABC

Ví dụ 2: (Bài 7/tr 13 – Sgk): *Qua phép đối xứng trục* $Đ_a$ ((a) *là trục đối xứng*), *đường thẳng* (d) *biến thành đường thẳng* (d'). *Hãy trả lời các câu hỏi:*

a. *Khi nào thì* (d) *song song với* (d')?

b. *Khi nào thì* (d) *trùng với* (d')?

c. *Khi nào thì* (d) *cắt với* (d')? *Giao điểm của* (d) *và* (d') *có tính chất gì?*

d. *Khi nào* (d) *vuông góc với* (d')?

✍ *Giải*

a. (d) // (a).

b. (d) ≡ (a) hoặc (d) ⊥ (a).

c. (d) cắt (a) và không vuông góc với (a). Khi đó giao điểm của (d) và (d') nằm trên đường thẳng (a).

d. $g(d, a) = 45^0$.

Ví dụ 3: (Bài 19/tr 8 – Sbt): *Cho hai điểm phân biệt* A, B. *Có những phép dời hình nào biến* A *thành* A, *biến* B *thành* B.

✍ *Giải*

Gọi f là phép dời hình thoả mãn điều kiện đầu bài (tức f(A) = A và f(B) = B).

Lấy điểm C không thẳng hàng với A, B và giả sử f(C) = C', khi đó chỉ có thể xảy ra một trong hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu C ≡ C' thì f là phép đồng nhất.

Trường hợp 2: Nếu C ≠ C' thì

$\Delta ABC = \Delta ABC' \Rightarrow$ C và C' đối xứng qua đường thẳng AB.

Tức f là phép đối xứng qua đường thẳng AB.

Ví dụ 4: (Bài 21/tr 8 – Sbt): *Cho hai đoạn thẳng bằng nhau* AB = A'B'. *Chứng minh rằng có thể tìm thấy một phép đối xứng trục hoặc hợp thành của hai phép đối xứng trục biến* A *thành* A', *biến* B *thành* B'.

✍ *Giải*

Ta xét các trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu A ≡ A' và B ≡ B' thì phép đối xứng trục AB thoả mãn điều kiện đầu bài.

Trường hợp 2: Nếu A ≠ A' thì gọi a là trung trực của đoạn AA', ta có ngay:

$Đ_a(A) = A'$ và $Đ_a(B) = B_1$.

Khi đó:

- Nếu B' ≡ B_1 thì phép đối xứng trục $Đ_a$ thoả mãn điều kiện đầu bài.
- Nếu B' ≠ B_1 thì gọi b là trung trực của đoạn B_1B', ta có ngay:

 $Đ_b(A') = A'$ và $Đ_b(B_1) = B'$.

 Tức hợp thành của hai phép đối xứng trục $Đ_a$ và $Đ_b$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

☞ ***Nhận xét***: Từ kết quả của ví dụ trên chúng ta thực hiện được yêu cầu "(Bài 22/tr 8 – Sbt): *Cho hai tam giác bằng nhau* ABC *và* A'B'C' (AB = A'B', BC = B'C', CA = C'A'). *Chứng minh rằng chỉ cần tối đa ba phép đối xứng trục để hợp thành của chúng biến* ΔABC *thành* ΔA'B'C'."

Ví dụ 5: *Cho hai hình vuông* ABCD *và* AMNP *có cạnh bằng* a. *Tìm phép đối xứng trục biến hình vuông* ABCD *thành* AMNP.

✍ *Giải*

Giả sử CD cắt MN tại E, ta đi chứng minh:

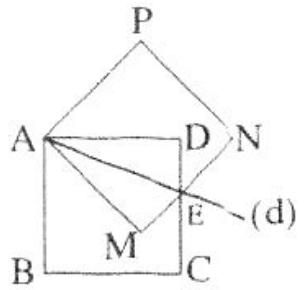
$S_{(AE)}(ABCD) = APNM$.

Thật vậy:

$\Delta AED = \Delta AEM \Rightarrow M = S_{(AE)}(D)$.

$\Delta AEC = \Delta AEN \Rightarrow N = S_{(AE)}(C)$.

$\Delta AEB = \Delta AEP \Rightarrow P = S_{(AE)}(B)$.



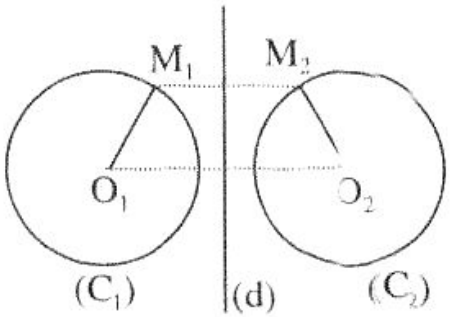
Ví dụ 6: *Cho hai đường tròn* (C_1) *và* (C_2) *lần lượt có tâm* O_1, O_2 *và đều có bán kính* R. *Chứng minh rằng* (C_2) *là ảnh của* (C_1) *qua phép đối xứng trục* (d), *với* (d) *là trung trực đoạn* O_1O_2.

✍ *Giải*

Lấy M_1 tuỳ ý thuộc (C_1) và gọi M_2 là ảnh của M_1 qua S_d.

Vì O_2M_2 và O_1M_1 đối xứng nhau qua (d), nên ta có:

$O_2M_2 = O_1M_1$.



Ta có:

$M_1 \in (C_1) \Leftrightarrow O_1M_1 = R \Leftrightarrow O_2M_2 = R \Leftrightarrow M_2 \in (C_2)$

Ngược lại: lấy M_2 là một điểm tuỳ ý thuộc (C_2) và gọi M_1 là tạo ảnh của nó qua S_d. Ta có:

$M_2 \in (C_2) \Leftrightarrow O_2M_2 = R \Leftrightarrow O_1M_1 = R \Rightarrow M_1 \in (C_1)$

Vậy (C_2) là ảnh của (C_1) qua S_d.

Vấn đề 2: TRỤC ĐỐI XỨNG CỦA MỘT HÌNH

Ví dụ 1: *Qua phép đối xứng trục* $Đ_a$.

a. *Những tam giác nào biến thành chính nó ?*

b. *Những đường tròn nào biến thành chính nó ?*

✍ *Giải*

a. Với ΔABC cân tại A và (a) là đường trung trực của BC thì $Đ_a(\Delta ABC) = \Delta AC3$.

b. Mọi đường tròn đều biến thành chính nó nếu (a) đi qua tâm của đường tròn.

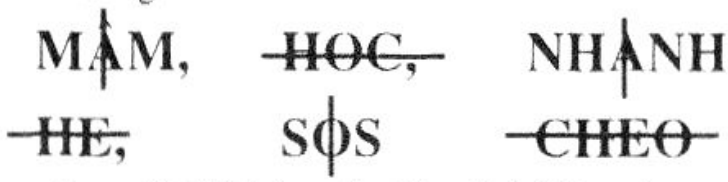
Ví dụ 2: (Bài 11/tr 14 – Sgk):

a. *Chỉ ra trục đối xứng (nếu có) của mỗi hình sau đây (mỗi hình là một từ bao gồm một số chữ cái):*
MÂM, HOC, NHANH, HE, SHE, COACH, IS, IT, SOS, CHEO

b. *Chứng minh rằng đồ thị của hàm số luôn có trục đối xứng.*

Giải

a. Ta có trục đối xứng:



b. Giả sử hàm số y = f(x) là hàm số chẵn, khi đó ta có:
f(−x) = f(x) ⇒ đồ thị hàm số nhận Oy làm trục đối xứng.

Vấn đề 3: GIẢI BÀI TOÁN ĐỊNH TÍNH

Phương pháp áp dụng

Ta thường gặp các dạng yêu cầu sau:

Dạng 1: Chứng minh $(\mathbf{H}_1)$ là ảnh của $(\mathbf{H}_2)$ qua phép đối xứng trục $Đ_a$, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy điểm M_1 tuỳ ý thuộc $(\mathbf{H}_1)$, ta đi chứng minh $M_2 = Đ_a(M_1) \in (\mathbf{H}_2)$.

Bước 2: Ngược lại, lấy điểm M_2 tuỳ ý thuộc $(\mathbf{H}_2)$, ta đi chứng minh $M_1 = Đ_a(M_2) \in (\mathbf{H}_1)$.

Dạng 2: Chứng minh tính chất K, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định một hoặc nhiều phép đối xứng trục để thiết lập mối liên kết giữa các yếu tố.

Bước 2: Sử dụng các tính chất của phép đối xứng trục để giải các yêu cầu của bài toán.

Ví dụ 1: (Bài 18/tr 8 – Sbt): *Cho hai điểm phân biệt* A, B *và phép dời hình* f *khác với phép đồng nhất sao cho* f(A) = A, f(B) = B. *Chứng minh rằng:*

a. *Nếu điểm* M *nằm trên đường thẳng* AB *thì* f(M) = M.

b. f *là phép đối xứng qua đường thẳng* AB.

Giải

a. Với điểm M nằm trên đường thẳng AB và f(M) = M', ta có:
f(AB) = AB và giữ nguyên thứ tự các bộ ba điểm (A, B, M), (A, B, M').
Ngoài ra:

$$\begin{cases} AM = AM' \\ BM = BM' \end{cases} \Rightarrow M \equiv M'.$$

b. Với điểm N không nằm trên đường thẳng AB và f(N) = N', ta có:

- $N \neq N'$, vì nếu trái lại thì f là phép đồng nhất, mâu thuẫn.
- $\Delta ABN = \Delta ABN' \Rightarrow$ N và N' đối xứng qua đường thẳng AB.

Vậy f là phép đối xứng qua đường thẳng AB.

Ví dụ 2: (Bài 20 a, b/tr 8 – Sbt): *Chứng minh rằng:*

a. *Hợp thành của hai phép đối xứng trục có trục đối xứng song song là một phép tịnh tiến.*

b. *Mỗi phép tịnh tiến đều có thể xem là hợp thành của hai phép đối xứng trục có trục đối xứng song song bằng nhiều cách.*

✍ *Giải*

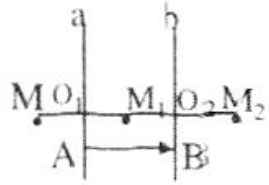
a. Gọi $Đ_a$, $Đ_b$ theo thứ tự là các phép đối xứng trục a, b có a // b và f là hợp thành của $Đ_a$ và $Đ_b$.

Với hai điểm A, B theo thứ tự thuộc a, b sao cho AB vuông góc với a.

Với điểm M bất kì, giả sử $Đ_a(M) = M_1$ và $Đ_b(M_1) = M_2$.

Ta có nhận xét:

$$\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = 2\overrightarrow{O_1M_1} + 2\overrightarrow{M_1O_2}$$
$$= 2(\overrightarrow{O_1M_1} + \overrightarrow{M_1O_2}) = 2\overrightarrow{O_1O_2} = 2\overrightarrow{AB}.$$



Vậy, phép biến hình biến M thành M_2 là một phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{v} = 2\overrightarrow{AB}$.

b. Với phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{v}$, lấy đường thẳng (a) vuông góc với $\vec{v}$ và gọi $b = T_{\frac{1}{2}\vec{v}}(a)$, ta có ngay:

$$T_{\vec{v}} = Đ_b(Đ_a).$$

Và vì có nhiều cách chọn đường thẳng (a) nên có nhiều phép đối xứng trục $Đ_a$ và $Đ_b$ có hợp thành là $T_{\vec{v}}$.

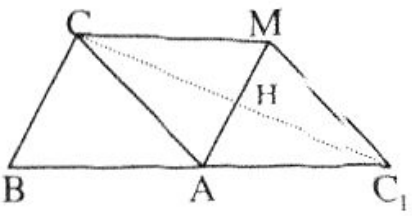
☞ ***Chú ý***: Chúng ta sẽ sử dụng kết quả trong ví dụ trên cho một số bài toán.

Ví dụ 3: (Bài 24 a, b/tr 9 – Sbt): *Gọi* (a) *là phân giác ngoài tại* A *của* ΔABC. *Chứng minh rằng với mọi điểm* M *trên* (a) *chu vi* ΔMBC *không nhỏ hơn chu vi* ΔABC.

✍ *Giải*

Gọi C_1 là điểm đối xứng với C qua phân giác ngoài AM của góc A, ta có:

$$MB + MC = MB + MC_1$$
$$\geq BC_1 = AB + AC_1 = AB + AC$$
$$\Leftrightarrow MB + MC + BC \geq AB + AC + BC, \text{ đpcm.}$$



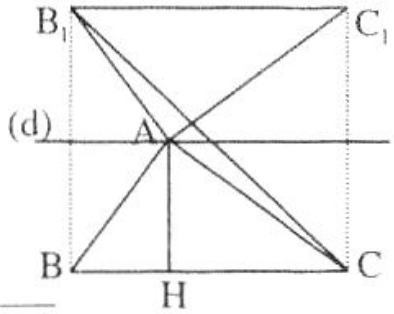
☞ ***Chú ý***: Trong nhiều tài liệu tham khảo, ví dụ trên được phát biểu dưới dạng thu gọn: "Lấy một điểm M trên đường phân giác ngoài góc A của ΔABC. Chứng minh rằng $MB + MC > AB + AC$". Và kết quả của ví dụ này sẽ được sử dụng cho các bài toán khác.

Ví dụ 4: *Cho* ΔABC *có* $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, p *là nửa chu vi*, h_a *là độ dài đường cao từ* A. *Chứng minh rằng* $h_a \le \sqrt{p(p-a)}$.

Giải

Dựng đường thẳng (d) qua A song song với BC.

Gọi B_1, C_1 lần lượt là điểm đối xứng của B, C qua đường thẳng (d).



Ta có:

$AC_1 = AC = b$,

$AB_1 = AB = c$,

$BB_1 = CC_1 = 2AH = 2h_a$,

$BB' \perp BC$.

Xét ΔAB_1C, ta có:

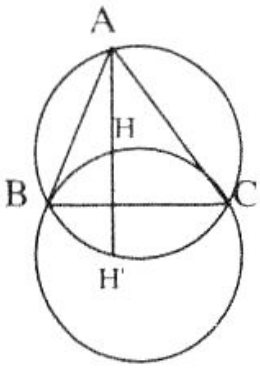
$$AB_1 + AC \ge B_1C = \sqrt{BC^2 + BB_1^2} \Leftrightarrow b + c \ge \sqrt{a^2 + 4h_a^2}$$

$$\Leftrightarrow h_a^2 \le \frac{1}{4}[(b+c)^2 - a^2] = p(p-a) \Leftrightarrow h_a \le \sqrt{p(p-a)}, \text{ đpcm.}$$

Nhận xét: Trong lời giải trên để chứng minh tính chất $h_a \le \sqrt{p(p-a)}$ chúng ta đã sử dụng một phép đối xứng trục (d), tuy nhiên điều đáng phải minh hoạ được ở đây là tại sao lại chọn trục (d) như vậy, điều này có thể được lý giải sơ lược như sau:

- Việc lựa chọn phép đối xứng trục (d) sẽ nhận được phần tử trung gian quan trọng là B_1C, phần tử này có được biểu diễn thông qua b và c hoặc qua a và h_a, từ đó nhận được mối liên hệ giữa a, b, c và h_a.
- Các em học sinh hãy trả lời thêm câu hỏi " Có tồn tại phép đối xứng trục khác (d) không và nếu có thì tính chất của phép đối xứng đó là gì ? ".

Ví dụ 5: (Bài 10/tr 13 – Sgk): *Cho hai điểm* B *và* C *cố định nằm trên đường tròn* (O; R) *và điểm* A *thay đổi trên đường tròn đó. Hãy dùng phép đối xứng trục để chứng minh rằng trực tâm* H *của tam giác* ABC *nằm trên một đường tròn cố định.*



Giải

Giả sử AH cắt đường tròn tại H'.

Ta có:

$H'CB = H'AB = HCB \Rightarrow \Delta H'CH$ cân tại C

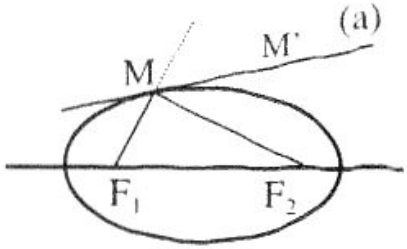
$\Rightarrow$ BC là đường trung trực của $H'H \Rightarrow H = Đ_{BC}(H')$.

Và vì $H' \in (O)$ nên $H \in Đ_{BC}((O))$.

☞ ***Chú ý***: Tiếp theo chúng ta sẽ quan tâm tới các ví dụ được đề xuất để tạo ra những định nghĩa về tiếp tuyến của ba đường cônic.

Ví dụ 6: (Bài 25/tr 9 – Sbt): *Cho elíp* (E) *với hai tiêu điểm* F_1, F_2. *Gọi* M *là điểm nằm trên* (E) *nhưng không nằm trên đường thẳng* F_1F_2 *và* (a) *là phân giác ngoài tại* M *của* ΔMF_1F_2. *Chứng minh rằng* (a) *chỉ cắt* (E) *tại điểm* M *duy nhất* (*đường thẳng* (a) *như thế được gọi là* ***tiếp tuyến*** *của* (E) *tại điểm* M).

✍ *Giải*



Giả sử elíp (E) có độ dài trục lớn bằng 2a, khi đó:

$MF_1 + MF_2 = 2a$ (theo định nghĩa elíp).

Khi đó, với điểm M' bất kì nằm trên (a) thì:

$M'F_1 + M'F_2 \geq MF_1 + MF_2 = 2a$.

Dấu "=" chỉ xảy ra khi $M \equiv M'$.

Như vậy, với mọi điểm M' khác M trên (a) ta luôn có:

$M'F_1 + M'F_2 > = 2a \Rightarrow M' \notin (E) \Leftrightarrow$ (a) chỉ cắt (E) tại điểm M duy nhất.

Ví dụ 7: *Cho* ΔABC *với* I *là tâm đường tròn nội tiếp và* P *là một điểm nằm trong tam giác. Gọi* A', B', C' *lần lượt là các điểm đối xứng với* P *qua các đường thẳng* IA, IB, IC. *Chứng minh rằng các đường thẳng* AA', BB' và CC' *đồng quy.*

✍ *Giải – Bạn đọc tự vẽ hình*

Ta xét các trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu P trùng I thì các đường thẳng AA', BB' và CC' đồng quy tại I.

Trường hợp 2: Nếu P nằm trong góc $\widehat{AIB}$ thì ta gọi P_A, P_B, P_C là các điểm đối xứng với P theo thứ tự qua các cạnh BC, CA, AB, ta có nhận xét với cách đặt $\widehat{PAB} = \alpha$ và $\widehat{PAI} = \beta$:

$$\widehat{P_CAA'} = \widehat{P_CAP} + \widehat{PAA'} = 2\alpha + 2\beta. \quad (1)$$

$$\widehat{A'AP_B} = \widehat{A'AC} + \widehat{CAP_B} = \widehat{A'AC} + \widehat{CAP} = \alpha + \alpha + 2\beta = 2\alpha + 2\beta. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{P_CAA'} = \widehat{A'AP_B}$, kết hợp với $AP_C = AP_B$ suy ra AA' là đường trung trực của đoạn P_BP_C.

Chứng minh tiếp tuyến ta cũng có:

- BB' là đường trung trực của đoạn P_AP_C.
- CC' là đường trung trực của đoạn P_AP_B.

Từ đó, suy ra các đường thẳng AA', BB' và CC' đồng quy tại I.

Các trường hợp P nằm trong góc $\widehat{BIC}$, $\widehat{AIC}$ được chứng minh tương tự.

Vấn đề 4: GIẢI BÀI TOÁN ĐỊNH LƯỢNG

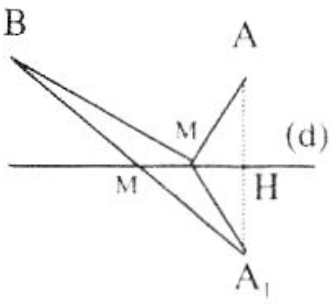
Phương pháp áp dụng

1. Bằng việc thiết lập được các phép tịnh tiến thích hợp, ngoài việc chứng minh được các tính chất hình học ta còn có thể tính toán được các yếu tố trong một hình.
2. Bằng việc lựa chọn phép đối xứng trục thích hợp cho điểm M, ta đưa bài toán giá trị lớn nhất, nhỏ nhất về các biểu thức độ dài, khi đó ta cần nhớ các kết quả:

$$MA + MB \geq AB; \qquad |MA - MB| \leq AB.$$

Ví dụ 1: *Cho đường thẳng* (d) *và hai điểm* A, B *cùng phía với* (d). *Tìm điểm* M *trên* (d) *sao cho* MA + MB *nhỏ nhất.*

Giải



Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua (d)

Ta có:

$$MA + MB = MA_1 + MB \geq A_1B.$$

Vậy, ta được:

$$(MA + MB)_{Min} = A_1B,$$

đạt được khi A_1, M, B thẳng hàng.

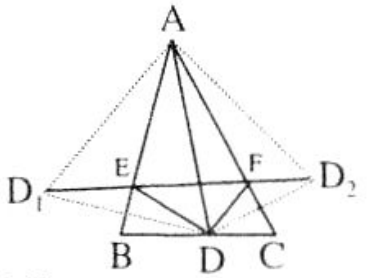
Chú ý: Chúng ta sẽ còn gặp lại dạng toán này trong bài toán hệ toạ độ của phép đối xứng trục.

Ví dụ 2: (Tương tự bài 9/tr 13 – Sgk): *Cho* ΔABC *nhọn*, D *là điểm cố định trên* BC. *Tìm hai điểm* E, F *theo thứ tự thuộc* AB *và* AC *sao cho* ΔDEF *có chu vi nhỏ nhất.*

Giải

Gọi D_1 là điểm đối xứng với D qua AB.

Gọi D_2 là điểm đối xứng với D qua AC.



Ta có chu vi ΔDEF được cho bởi:

$$CV_{\Delta DEF} = DE + DF + EF = D_1E + D_2F + EF.$$

Vậy ΔDEF có chu vi nhỏ nhất

$\Leftrightarrow$ $D_1E + D_2F + EF$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow$ EF thuộc đường thẳng D_1D_2

$\Leftrightarrow$ E, F theo thứ tự là giao điểm của D_1D_2 với AB, AC.

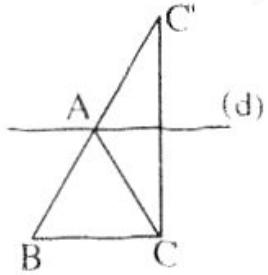
Khi đó $(CV_{\Delta DEF})_{Min} = D_1D_2$.

Ví dụ 3: *Trong các tam giác có cạnh đáy bằng* a, *chiều cao bằng* h, *hãy tìm tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp nhỏ nhất.*

Giải

Không mất tính tổng quát ta giả sử ΔABC có đáy BC = a cố định và độ dài đường cao AH = h.

Từ đó suy ra đỉnh A chạy trên đường thẳng (d) song song và cách BC một khoảng bằng h.



Ta có:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ah = pr \Leftrightarrow r = \frac{ah}{2p}.$$

Từ đó, suy ra:

r nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ ΔABC có chu vi nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ AB + AC nhỏ nhất

$\Leftrightarrow$ A, B, C' thẳng hàng, với C' là điểm đối xứng với C qua (d).

Ví dụ 4: *Cho* ΔABC *nhọn.*

a. *Tìm ba điểm* D, E, F *theo thứ tự thuộc* BC, AB *và* AC *sao cho* ΔDEF *có chu vi nhỏ nhất.*

b. *Tìm giá trị nhỏ nhất của chu vi* ΔDEF *theo các cạnh* a, b, c *của* ΔABC.

✍ *Giải – Bạn đọc tự vẽ hình*

a. Chúng ta đã biết kết quả rằng với điểm D cố định thì:

$$(CV_{\Delta DEF})_{Min} = D_1D_2.$$

Do đó, khi D di động trên BC, chu vi ΔDEF nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ D_1D_2 nhỏ nhất.

Trong ΔAD_1D_2, ta có:

$$AD_1 = AD_2 = AD,\ D_1\hat{A}D_2 = 2\hat{A} \text{ không đổi,}$$

do đó D_1D_2 nhỏ nhất

$\Leftrightarrow$ AD nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ AD $\perp$ BC $\Leftrightarrow$ D là chân đường cao đỉnh A của ΔABC

Vì vai trò của D, E, F như nhau nên ta kết luận được rằng chu vi ΔDEF nhỏ nhất khi và chỉ khi D, E, F theo thứ tự là chân các đường cao của ΔABC.

b. Gọi K là trung điểm của D_1D_2, ta có:

$$D_1D_2 = 2D_1K = 2AD_1.\sin D_1\hat{A}K = 2AD.\sin\hat{A}. \quad (1)$$

Mặt khác ta có:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AD.BC = \frac{1}{2}AB.AC.\sin\hat{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

suy ra:

$$AD = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}. \quad (2)$$

$$\sin\hat{A} = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc}. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$D_1D_2 = \frac{8p(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} = (CV_{\Delta DEF})_{Min}.$$

Vấn đề 5: TÌM TẬP HỢP ĐIỂM M

Phương pháp áp dụng

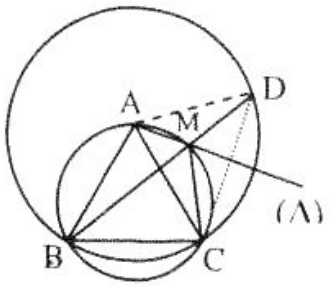
Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm một phép đối xứng trục $Đ_a$, biến điểm E di động thành điểm M .

Bước 2: Tìm tập hợp (**H**) của các điểm E.

Bước 3: Kết luận tập hợp các điểm M là ảnh của (**H**) trong phép đối xứng trục $Đ_a$.

Ví dụ 1: *Cho* ΔABC *cân tại* A. *Một đường thẳng di động* (Δ) *qua* A. *Gọi* D *là điểm đối xứng của* C *qua* (Δ). *Đường thẳng* BD *cắt* (Δ) *tại* M. *Tìm quỹ tích các điểm* D *và* M.



Giải

a. *Tìm tập hợp điểm* D: Từ giả thiết suy ra AD = AC không đổi, do đó quỹ tích các điểm D thuộc đường tròn tâm A, bán kính AC.

b. *Tìm tập hợp điểm* M: Ta có:

$$\widehat{BMC} = \widehat{MCD} + \widehat{MDC} = 2\widehat{MDC} = 2\widehat{BDC} = \widehat{BAC} \text{ không đổi.}$$

Vậy quỹ tích các điểm M thuộc cung tròn chứa góc A của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Vấn đề 6: DỰNG HÌNH

Phương pháp áp dụng

Ta luôn thực hiện theo 4 bước đã biết.

Ví dụ 1: *Cho đường thẳng* xx' *và hai điểm* P, Q *cùng nằm một phía đối với* xx'. *Dựng điểm* $A \in xx'$ *sao cho* $\widehat{PAx} = \widehat{QAx'}$.

Giải

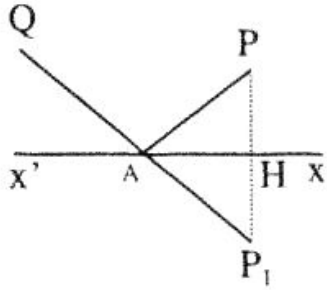
Phân tích: Giả sử đã dựng được điểm $A \in xx'$ sao cho $\widehat{PAx} = \widehat{QAx'}$.

Thực hiện phép đối xứng trục (xx'):

$S_{(xx')}: P \mapsto P_1$,

Khi đó

$\widehat{PAx} = \widehat{P_1Ax} = \widehat{QAx'} \Leftrightarrow P_1, A, Q$ thẳng hàng.



Cách dựng: Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng điểm P_1 với $P_1 = S_{(xx')}(P)$
- Lấy điểm chung A của (xx') và (P_1Q)

Khi đó A là điểm phải dựng.

Chứng minh: Theo cách dựng, ta có $\widehat{QAx'} = \widehat{P_1Ax} = \widehat{PAx}$.

Biện luận: Số nghiệm của bài toán bằng số nghiệm chung của (xx') và (P_1Q) nên luôn tồn tại duy nhất một điểm A.

Vấn đề 7: HỆ TOẠ ĐỘ ĐỐI VỚI PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

Phương pháp áp dụng

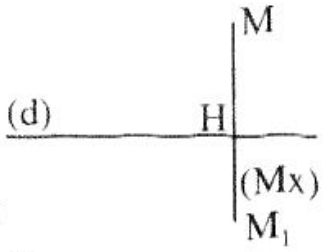
Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy:

- Phép đối xứng qua trục Ox biến điểm M(x; y) thành điểm M'(x'; y') với:
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}.$$
- Phép đối xứng qua trục Oy biến điểm M(x; y) thành điểm M'(x'; y') với:
$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}.$$

Trong phần này chúng ta xem xét ba bài toán cơ bản và mong muốn thông qua đó các em có thể xây dựng được phương pháp giải bài toán tổng quát.

Dạng 1: Xác định điểm M_1 đối xứng với điểm M qua đường thẳng (d) có phương trình Ax + By + C = 0.

Ta thực hiện theo các bước sau:



Bước 1: Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MM_1} \,//\, \overrightarrow{n_d}(A;B) \\ \text{Trung điểm H của } MM_1 \text{ thuộc (d)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B(x_{M_1} - x_M) - A(y_{M_1} - y_M) = 0 \\ A\left(\dfrac{x_{M_1} + x_M}{2}\right) + B\left(\dfrac{y_{M_1} + y_M}{2}\right) + C = 0 \end{cases}. \quad (I)$$

Bước 2: Giải hệ (I) ta được toạ độ điểm M_1.

☞ ***Chú ý***:

1. Cũng có thể thực hiện theo cách:

 Bước 1: Xác định toạ độ hình chiếu vuông góc H của M trên (d).

 Bước 2: Gọi M_1 là điểm đối xứng với M qua (d) thì H là trung điểm MM_1, ta được:
$$\begin{cases} x_{M_1} = 2x_H - x_M \\ y_{M_1} = 2y_H - y_M \end{cases}.$$

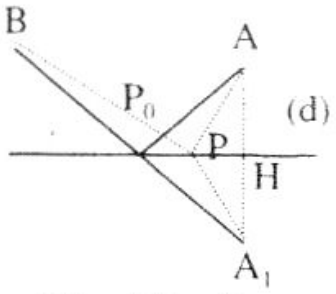
2. Ảnh của điểm $M(x_0; y_0)$ qua phép đối xứng:
 - Trục Ox là $M_1(x_0; -y_0)$.
 - Trục Oy là $M_1(-x_0; y_0)$.

3. Như chúng ta đã biết, việc tìm ra toạ độ điểm M_1 sẽ cho phép ta giải được dạng toán với yêu cầu "*Cho đường thẳng* (d) *và hai điểm* A, B *cùng phía với* (d). *Tìm điểm* P *trên* (d) *sao cho* PA + PB *nhỏ nhất*", ta thực hiện theo các bước sau:

 Bước 1: Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua (d) , suy ra toạ độ A_1.

Bước 2: Gọi $P_0 = (A_1B) \cap (d)$

$$\begin{cases} P_0 \in (d) \\ P_0, A, B \text{ thẳng hàng} \end{cases} \Rightarrow \text{toạ độ } P_0.$$



Bước 3: Ta có $PA + PB = PA_1 + PB \geq A_1B$.

Vậy $(PA + PB)_{Min} = A_1B$, đạt được khi:

A_1, P, B thẳng hàng $\Leftrightarrow P \equiv P_0$.

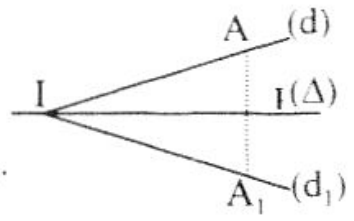
Dạng 2: Xác định phương trình đường thẳng (d_1) đối xứng với đường thẳng (d) qua đường thẳng (Δ).

Ta xét hai khả năng sau:

Khả năng 1: Nếu $(d) \cap (\Delta) = \{I\}$. Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định toạ độ giao điểm I.

Bước 2: Lấy một điểm $A \in (d)$, từ đó xác định toạ độ điểm A_1 đối xứng với A qua (Δ).



Bước 3: Đường thẳng (d_1) qua I và A_1.

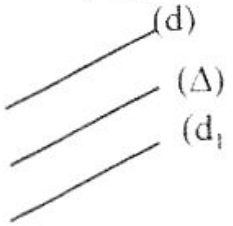
$$(d_1): \begin{cases} \text{qua I} \\ \text{qua } A_1 \end{cases}.$$

Khả năng 2: Nếu $(d) // (\Delta)$. Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Viết lại phương trình của (d), (Δ) dưới dạng:

$(d): Ax + By + C_d = 0$,

$(\Delta): Ax + By + C_\Delta = 0$.



Bước 2: Khi đó:

$(d_1): Ax + By + C = 0$

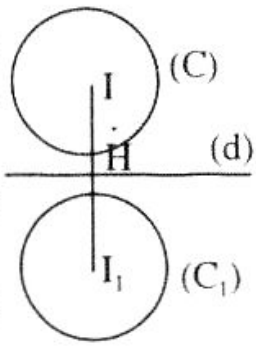
với C được xác định bởi $C_\Delta = \frac{1}{2}(C_d + C)$.

Dạng 3: Xác định phương trình đường tròn (C_1) đối xứng với đường tròn (C): $f(x, y) = 0$ qua đường thẳng (d).

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Gọi I, I_1 theo thứ tự là tâm đường tròn (C), (C_1) và R là bán kính đường tròn (C).

Bước 2: Xác định toạ độ điểm I_1 đối xứng với I qua (d).



Bước 3: Lập phương trình đường tròn (C_1) thoả mãn:

$$(C_1): \begin{cases} \text{tâm } I_1 \\ \text{bán kính R} \end{cases}.$$

☞ *Chú ý*. Trong trường hợp đường thẳng (d) có dạng $x = \alpha$ (hoặc $y = \beta$) ta có thể thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Với mỗi $M(x; y) \in (C_1) \Leftrightarrow \exists M_1(x_1; y_1) \in (C)$ sao cho M đối xứng với M_1 qua đường thẳng $x = \alpha$ (hoặc $y = \beta$) $\Leftrightarrow \exists\, x_1, y_1$ thoả mãn:

$$\begin{cases} f(x_1, y_1) = 0 \\ x_1 + x = 2\alpha \\ y_1 = y \end{cases} \quad (\text{hoặc} \quad \begin{cases} f(x_1, y_1) = 0 \\ x_1 = x \\ y_1 + y = 2\beta \end{cases}) \qquad (I)$$

Bước 2: Khử x_1, y_1 từ hệ (I) ta được phương trình của đường tròn (C_1).

Ví dụ 1: *Trong mặt phẳng toạ độ* Oxy, *tìm toạ độ điểm* M_1 *là điểm đối xứng với điểm* M *qua* (d), *biết*:

a. (d) ≡ Ox *và* M(1; −2). b. (d) ≡ Oy *và* M(−2; 3).

c. (d): $x - 2 = 0$ *và* M(1; −1). d. (d): $y + 1 = 0$ *và* M(−1; 3).

✍ *Giải*

a. Sử dụng công thức ta có ngay $M_1(1; 2)$.

b. Sử dụng công thức ta có ngay $M_1(2; 3)$.

c. Giả sử $M_1(x; y)$, ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{2} = 2 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow M_1(3; -1).$$

Vậy, ta được $M_1(3; -1)$.

d. Giả sử $M_1(x; y)$, ta có:

$$\begin{cases} x = -1 \\ \dfrac{y+3}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -5 \end{cases} \Rightarrow M_1(-1; -5).$$

Vậy, ta được $M_1(-1; -5)$.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, thông qua các câu c), d) các em học sinh đã biết cách tìm toạ độ của điểm đối xứng qua một đường thẳng song song với trục toạ độ.

Ví dụ 2: *Trong mặt phẳng toạ độ* Oxy, *tìm toạ độ điểm* M_1 *là điểm đối xứng với điểm* M *qua* (d), *biết*:

a. (d): $x + y - 2 = 0$ *và* M(1; 1). b. (d): $3x + 4y - 12 = 0$ *và* M(7; 4).

c. (d): $\begin{cases} x = 4t \\ y = 3 + 3t \end{cases}$ *và* M(3; −1).

✍ *Giải*

a. Nhận xét rằng $M \in$ (d) nên $M_1 \equiv M$.

b. Giả sử $M_1(x; y)$, ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MM_1} \,//\, \overrightarrow{n_d}(3;4) \\ \text{Trung điểm H của } MM_1 \text{ thuộc (d)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x-7)-3(y-4)=0 \\ 3\left(\dfrac{x+7}{2}\right)+4\left(\dfrac{y+4}{2}\right)-12=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases} \Rightarrow M_1(1;-4).$$

Vậy, ta được $M_1(1; -4)$.

c. Giả sử $M_1(x; y)$, ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MM_1} \perp \overrightarrow{u_d}(4;3) \\ \text{Trung điểm H của } MM_1 \text{ thuộc (d)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x-3)+3(y+1)=0 \\ \dfrac{x+3}{2}=4t \\ \dfrac{y-1}{2}=3+3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=7 \end{cases}$$

$\Rightarrow M_1(-3; 7)$.

Vậy, ta được $M_1(-3; 7)$.

Ví dụ 3: *Trong mặt phẳng toạ độ* Oxy, *tìm phương trình đường thẳng* (d_1) *là ảnh của đường thẳng* (d): $x - y + 4 = 0$ *qua phép đối xứng với trục* (Δ), *biết*:

a. $(\Delta) \equiv Ox$. b. $(\Delta) \equiv Oy$. c. (Δ): $x + y + 3 = 0$.

Giải

a. Ta có ngay (d_1): $x + y + 4 = 0$.

b. Ta có ngay (d_1): $x + y - 4 = 0$.

c. Nhận xét rằng $(d) \perp (\Delta)$ nên phép đối xứng qua trục (Δ) biến đường thẳng (d) thành chính nó, tức (d_1): $x - y + 4 = 0$.

Nhận xét: Như vậy, phương trình của đường (C_1) là ảnh của (C): $f(x, y) = 0$ qua phép đối xứng với:

a. Trục Ox sẽ có dạng $f(x, -y) = 0$, tức thay y bằng $-y$ vào phương trình của (C).
Từ đó, ta có tổng quát đối với đường thẳng:
"Ảnh của đường thẳng (d): $Ax + By + C = 0$ *qua phép đối xứng trục* Ox *có phương trình* $Ax - By + C = 0$".

b. Trục Oy sẽ có dạng $f(-x, y) = 0$, tức thay x bằng $-x$ vào phương trình của (C).
Từ đó, ta có tổng quát đối với đường thẳng:
"Ảnh của đường thẳng (d): $Ax + By + C = 0$ *qua phép đối xứng trục* Oy *có phương trình* $Ax - By - C = 0$".

Ngoài ra:

"Ảnh của đường thẳng (d): $Ax + By + C = 0$ *qua phép đối xứng trục* (Δ) vuông góc với (d) *chính là* (d)".

Ví dụ 4: *Trong mặt phẳng toạ độ* Oxy, *tìm phương trình đường thẳng* (d_1) *là ảnh của đường thẳng* (d) *qua phép đối xứng với trục* (Δ), *biết:*

a. (d): $4x - y + 3 = 0$ và (Δ): $x - y = 0$.

b. (d): $6x - 3y + 4 = 0$ và (Δ): $4x - 2y + 3 = 0$.

✍ *Giải*

a. Nhận xét rằng $(d) \cap (\Delta) = \{I\}$, khi đó toạ độ điểm I là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 4x - y + 3 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow I(-1; -1).$$

Lấy điểm $A(0; 3) \in (d)$, gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (Δ), ta có:

- $(AH) \perp (\Delta) \Rightarrow (AH): x + y + C = 0.$
- $A \in (AH) \Leftrightarrow 3 + C = 0 \Leftrightarrow C = -3.$

Vậy (AH): $x + y - 3 = 0$. Khi đó toạ độ điểm H là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow H\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua (Δ) $\Rightarrow$ H là trung điểm của $AA_1 \Rightarrow A_1(3; 0)$.

Đường thẳng (d_1) được cho bởi:

$$(d_1): \begin{cases} \text{qua } I(-1,-1) \\ \text{qua } A_1(3,0) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \frac{x+1}{3+1} = \frac{y+1}{1} \Leftrightarrow (d_1): x - 4y - 3 = 0$$

b. Nhận xét rằng (d)//(Δ), khi đó viết lại phương trình hai đường thẳng dưới dạng:

$$(d): 2x - y + \frac{4}{3} = 0 \text{ và } (\Delta): 2x - y + \frac{3}{2} = 0.$$

Khi đó (d_1): $2x - y + C = 0$, với C được xác định bởi:

$$C_\Delta = \frac{1}{2}(C_d + C) \Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3} + C\right) \Leftrightarrow C = \frac{5}{3}.$$

Vậy, phương trình đường thẳng (d_1): $2x - y + \frac{5}{3} = 0$.

Ví dụ 5: *Trong mặt phẳng toạ độ* Oxy, *cho đường tròn* (C) *có phương trình* $x^2 + y^2 + 10y - 5 = 0$. *Viết phương trình ảnh của đường tròn trên qua phép đối xứng có trục:*

a. (Bài 8.b/tr 13 – Sgk): Oy. b. Ox.

c. (d): $x + y - 5 = 0$.

✍ *Giải*

Đường tròn (C) có tâm I(0; –5) và bán kính $R = \sqrt{30}$.

a. Ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Mỗi điểm $M(x; y) \in (C')$ là ảnh của một điểm $M_0(x_0; y_0) \in (C)$ qua phép đối xứng có trục Oy.

Ta có:

$$\begin{cases} M_0(x_0; y_0) \in (C) \\ Oy \text{ là trung trực của } M_0M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + 10y_0 - 5 = 0 \\ x_0 = -x \\ y_0 = y \end{cases}$$

$$\Rightarrow (-x)^2 + y^2 + 10y - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 10y - 5 = 0. \quad (1)$$

Phương trình (1) chính là phương trình của (C').

Cách 2: Phép đối xứng qua trục Oy biến mỗi điểm M(x; y) thành điểm M'(−x; y), do đó bằng việc thay x bởi −x vào phương trình của (C), ta được:

$$(-x)^2 + y^2 + 10y - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 10y - 5 = 0.$$

Đó chính là phương trình đường tròn (C') cần tìm.

Cách 3: Đường tròn (C') đối xứng với đường tròn (C) qua Oy có:

$$\begin{cases} \text{tâm } I'(0; -5) \\ \text{bán kính } R' = \sqrt{30} \end{cases} \Leftrightarrow (C'): x^2 + (y + 5)^2 = 30.$$

b. Ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Mỗi điểm $M(x; y) \in (C')$ là ảnh của một điểm $M_0(x_0; y_0) \in (C)$ qua phép đối xứng có trục Ox.

Ta có:

$$\begin{cases} M_0(x_0; y_0) \in (C) \\ Oy \text{ là trung trực của } M_0M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + 10y_0 - 5 = 0 \\ x_0 = x \\ y_0 = -y \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + (-y)^2 + 10(-y) - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 10y - 5 = 0. \quad (2)$$

Phương trình (3) chính là phương trình của (C').

Cách 2: Phép đối xứng qua trục Ox biến mỗi điểm M(x; y) thành điểm M'(x; −y), do đó bằng việc thay y bởi −y vào phương trình của (C), ta được:

$$x^2 + (-y)^2 + 10(-y) - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 10y - 5 = 0.$$

Đó chính là phương trình đường tròn (C') cần tìm.

Cách 3: Đường tròn (C') đối xứng với đường tròn (C) qua Ox có:

$$\begin{cases} \text{tâm } I'(0; 5) \\ \text{bán kính } R' = \sqrt{30} \end{cases} \Leftrightarrow (C'): x^2 + (y - 5)^2 = 30.$$

c. Nhận xét rằng tâm $I \in (d)$ nên phép đối xứng qua trục (d) biến đường tròn (C) thành chính nó, tức (C'): $x^2 + y^2 + 10y - 5 = 0$.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy:

a. Ảnh của đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2Ax - 2By + C = 0$ qua phép đối xứng trục Ox có phương trình:

$$x^2 + y^2 - 2Ax + 2By + C = 0.$$

b. Ảnh của đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2Ax - 2By + C = 0$ qua phép đối xứng trục Oy có phương trình:

$$x^2 + y^2 + 2Ax - 2By + C = 0.$$

Ngoài ra "Ảnh của đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2Ax - 2By + C = 0$ qua phép đối xứng trục (d) đi qua tâm I của (C) chính là (C)".

Ví dụ 6: *Trong mặt phẳng toạ độ* Oxy, *cho đường tròn* (C) *có phương trình* $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$. *Viết phương trình ảnh của đường tròn trên qua phép đối xứng có trục*:

a. (d): $x - 2 = 0$. b. (d): $y - 1 = 0$.

c. (d): $x + y - 5 = 0$.

Giải

Đường tròn (C) có tâm I(1; 2) và bán kính $R = \sqrt{2}$ được viết lại dưới dạng:

(C): $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$.

a. Ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Với mỗi $M_0(x_0; y_0) \in (C')$ sẽ:

$\exists M(x; y) \in (C)$ sao cho M đối xứng với M_0 qua đường thẳng $x = 2$

$\Leftrightarrow \exists$ x, y thoả mãn:

$$\begin{cases} (x_0 - 1)^2 + (y_0 - 2)^2 = 2 \\ x_0 + x = 4 \\ y_0 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4 - x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2 \\ x_0 = 4 - x \\ y_0 = y \end{cases}$$

$\Rightarrow (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 2$.

Vậy phương trình đường tròn (C'): $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 2$.

Cách 2: Đường tròn (C') đối xứng với đường tròn (C) qua (d) có bán kính $R = \sqrt{2}$ và tâm I'(x; y) thoả mãn:

$$\begin{cases} \dfrac{x + 1}{2} = 2 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow I'(3; 2).$$

Vậy, ta được:

$$(C'): \begin{cases} \text{tâm } I'(3;2) \\ \text{bán kính } R = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow (C'): (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 2.$$

b. Ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Với mỗi $M_0(x_0; y_0) \in (C')$ sẽ:

$\exists M(x; y) \in (C)$ sao cho M đối xứng với M_0 qua đường thẳng $y = 1$

$\Leftrightarrow \exists$ x, y thoả mãn:

$$\begin{cases} (x_0 - 1)^2 + (y_0 - 2)^2 = 2 \\ x_0 = x \\ y_0 + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)^2 + (2 - y - 2)^2 = 2 \\ x_0 = x \\ y_0 + y = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 2.$

Vậy phương trình đường tròn (C'): $(x-1)^2 + y^2 = 2$.

Cách 2: Đường tròn (C') đối xứng với đường tròn (C) qua (d) có bán kính $R = \sqrt{2}$ và tâm I'(x; y) thoả mãn:

$$\begin{cases} x = 1 \\ \dfrac{y+2}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow I'(1; 0).$$

Vậy, ta được:

$$(C'): \begin{cases} \text{tâm } I'(1;0) \\ \text{bán kính } R = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow (C'): (x-1)^2 + y^2 = 2.$$

c. Đường tròn (C') đối xứng với đường tròn (C) qua (d) có bán kính $R = \sqrt{2}$ và tâm I'(x; y) thoả mãn:

$$\begin{cases} \overrightarrow{II'} \perp \overrightarrow{u_d}(1; -1) \\ \text{Trung điểm H của II' thuộc (d)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1(x-1) - 1(y-2) = 0 \\ \left(\dfrac{x+1}{2}\right) + \left(\dfrac{y+2}{2}\right) - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow I'(3; 4).$$

Vậy, ta được:

$$(C'): \begin{cases} \text{tâm } I'(3;4) \\ \text{bán kính } R = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow (C'): (x-3)^2 + (y-4)^2 = 2.$$

☞ ***Chú ý***: Ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ việc sử dụng hệ toạ độ của phép đối xứng trục để thực hiện yêu cầu tối ưu.

Ví dụ 7: *Tìm trên trục hoành điểm* P *sao cho tổng các khoảng cách từ* P *tới các điểm* A *và* B *là nhỏ nhất, biết* A(1; 2) *và* B(3; 6), *tìm giá trị nhỏ nhất đó.*

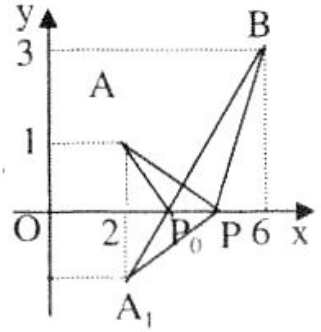
✍ *Giải*

Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua Ox, suy ra $A_1(1; -2)$.

Gọi $P_0 = (A_1B) \cap Ox$, suy ra $P_0(x; 0)$, A, B thẳng hàng:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AP_0} \,//\, \overrightarrow{AB} \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - y - 6 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_0\left(\frac{3}{2}; 0\right).$$



Ta có

$$PA + PB = PA_1 + PB \geq A_1B.$$

Vậy, ta thấy:

$$(PA + PB)_{Min} = A_1B = \sqrt{(3-1)^2 + (3+1)^2} = 2\sqrt{5},$$

đạt được khi:

$$A_1, P, B \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow P \equiv P_0\left(\frac{3}{2}; 0\right).$$

Ví dụ 8: *Cho* ΔABC *biết* $A(2; -1)$ *và hai đường phân giác trong của góc* B, C *có phương trình:*

$$(d_B): x - 2y + 1 = 0 \text{ và } (d_C): x + y + 3 = 0.$$

Lập phương trình cạnh BC.

Giải

Nhận xét rằng: nếu lấy A_1, A_2 theo thứ tự là điểm đối xứng của A qua (d_B) và (d_C) thì $A_1, A_2 \in BC$.

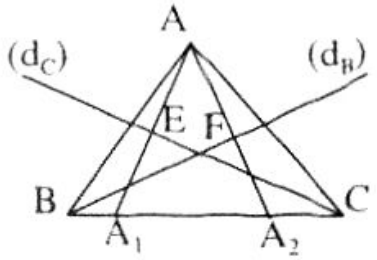
Vậy, phương trình đường thẳng (A_1A_2) cũng chính là phương trình đường thẳng (BC). Ta lần lượt đi xác định A_1, A_2:

a. *Xác định* A_1: Gọi (d_1) là đường thẳng thoả mãn:

$$(d_1): \begin{cases} \text{qua A} \\ (d_1) \perp (d_B) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \begin{cases} \text{qua A}(2;-1) \\ \text{vtpt } \vec{a}_B(2;1) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): 2x + y - 3 = 0.$$

Gọi $E = (d_1) \cap (d_B)$, toạ độ điểm E là nghiệm hệ:

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow E(1; 1).$$



Vì E là trung điểm của AA_1, do đó:

$$\begin{cases} x_{A_1} = 2x_E - x_A = 0 \\ y_{A_1} = 2y_E - y_A = 3 \end{cases} \Leftrightarrow A_1(0; 3).$$

b. *Xác định* A_2: Gọi (d_2) là đường thẳng thoả mãn:

$$(d_2): \begin{cases} \text{qua A} \\ (d_2) \perp (d_C) \end{cases} \Leftrightarrow (d_2): \begin{cases} \text{qua A}(2;-1) \\ \text{vtpt } \vec{a}_C(1;-1) \end{cases} \Leftrightarrow (d_2): x - y - 3 = 0.$$

Gọi $F = (d_2) \cap (d_C)$, toạ độ điểm F là nghiệm hệ:

$$\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ x + y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow F(0; -3).$$

Vì F là trung điểm của AA_2, do đó:

$$\begin{cases} x_{A_2} = 2x_F - x_A = 0 \\ y_{A2} = 2y_F - y_A = 3 \end{cases} \Leftrightarrow A_2(-2; -5).$$

Vậy, phương trình (BC) được xác định bởi:

$$(BC): \begin{cases} \text{qua } A_1(0;3) \\ \text{qua } A_2(-2;-5) \end{cases} \Leftrightarrow (BC): 4x - y + 3 = 0.$$

☞ *Nhận xét*: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên cần sử dụng kiến thức về hệ toạ độ của phép đối xứng trục. Tuy nhiên, trong một vài trường hợp riêng kiến thức này sẽ giúp các em học sinh đề xuất thêm một cách giải cho bài toán, thí dụ với yêu cầu *"Cho* ΔABC *biết toạ độ các đỉnh* B, C *và toạ độ trực tâm* H *của* ΔABC. *Hãy viết phương trình đường tròn ngoại tiếp* ΔABC" chúng ta có hai cách giải sau:

Cách 1: Lập phương trình cạnh AB, thoả mãn :

$$(AB):\begin{cases}\text{qua } B\\ \text{vtpt } \overrightarrow{CH}\end{cases}$$

Lập phương trình cạnh AC, thoả mãn :

$$(AC):\begin{cases}\text{qua } C\\ \text{vtpt } \overrightarrow{BH}\end{cases}$$

Từ đó, xác định được toạ độ điểm $A = (AB)\cap(AC)$.

Lập phương trình đường tròn đi qua 3 điểm A, B, C.

Cách 2: Nhận xét rằng đường tròn ngoại tiếp ΔABC đối xứng với đường tròn ngoại tiếp ΔHBC qua BC. Do đó:

- Lập phương trình đường tròn (C) đi qua 3 điểm H, B, C.
- Lập phương trình đường tròn (C_1) đối xứng với đường tròn (C) qua BC.

Và phương pháp được sử dụng trong cách 2 cho phép ta giải được bài toán mang tính quĩ tích như sau:

> *"Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp* ΔABC, *biết phương trình cạnh* BC *và đường tròn ngoại tiếp* ΔHBC"

trong khi đó nếu thực hiện bằng cách 1 sẽ rất phức tạp.

Ví dụ 9: *Cho hàm số* $y = x^2 - 2x + 3$. *Chứng tỏ rằng đồ thị hàm số nhận đường thẳng* $x = 1$ *làm trục đối xứng.*

✍ *Giải*

Với phép biến đổi toạ độ:

$$\begin{cases}X = x - 1\\ Y = y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = X + 1\\ y = Y\end{cases}$$

ta được:

$Y = (X + 1)^2 - 2(X + 1) + 3 \Leftrightarrow Y = X^2 + 2$ là hàm số chẵn.

Vậy, đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = 1$ làm trục đối xứng.

☞ ***Nhận xét***:

1. Đồ thị hàm số bậc hai:

$$y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$$

luôn nhận đường thẳng $x = -\dfrac{b}{2a}$ làm trục đối xứng.

2. Như vậy, để chứng minh đồ thị hàm số $y = f(x)$ nhận đường thẳng $x = a$ làm trục đối xứng, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Với phép biến đổi toạ độ

$$\begin{cases} X = x - a \\ Y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + a \\ y = Y \end{cases}$$

hàm số có dạng:

$$Y = f(X + a) \Leftrightarrow Y = F(X) \qquad (1)$$

Bước 2: Nhận xét rằng hàm số (1) là hàm số chẵn.

Bước 3: Vậy, đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = a$ làm trục đối xứng.

Ví dụ 10: *Cho hàm số* $y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 1$. *Chứng tỏ rằng đồ thị hàm số có một trục đối xứng thẳng đứng.*

✍ *Giải*

Giả sử đồ thị hàm số có trục đối xứng là $x = a$.

Khi đó, với phép biến đổi toạ độ:

$$\begin{cases} X = x - a \\ Y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + a \\ y = Y \end{cases}$$

hàm số được chuyển về dạng:

$Y = (X + a)^4 - 4(X + a)^3 - 2(X + a)^2 + 12(X + a) - 1$ là hàm số chẵn.

Ta có:

$$\begin{aligned} Y &= (X + a)^4 - 4(X + a)^3 - 2(X + a)^2 + 12(X + a) - 1 \\ &= X^4 + 4a^2X^2 + a^4 + 4aX^3 + 2a^2X^2 + 4a^3X - 4(X^3 + 3X^2a + \\ &\qquad + 3Xa^2 + a^3) - 2(X^2 + 2Xa + a^2) + 12(X + a) - 1 \\ &= X^4 + 4(a - 1)X^3 + 2(3a^2 - 6a - 1)X^2 + 4(a^3 - 3a^2 - a + 3)X + \\ &\qquad + a^4 - 4a^3 - 2a^2 + 12a - 1. \end{aligned}$$

Hàm số (1) là hàm số chẵn:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(a - 1) = 0 \\ 4(a^3 - 3a^2 - a + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1.$$

Vậy, đồ thị hàm số có một trục đối xứng $x = 1$.

☞ ***Chú ý***: Với các hàm số dạng trên, một câu hỏi phụ thường được đặt thêm vào sau khi xác định được trục đối xứng thẳng đứng của nó là " *Tìm giao điểm của đồ thị với trục hoành* ", khi đó ta thực hiện như sau:

Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình:

$$x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 1 = 0. \qquad (1)$$

Đặt $x = X + 1$, phương trình (1) có dạng:

$$X^4 - 8X^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow X^2 = 4 \pm \sqrt{10} \Leftrightarrow X = \pm\sqrt{4 \pm \sqrt{10}} \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{4 \pm \sqrt{10}}.$$

Vậy, đồ thị hàm số cắt Ox tại bốn điểm có hoành độ $x = 1 \pm \sqrt{4 \pm \sqrt{10}}$.

Ví dụ 11: *Xác định m để đồ thị hàm số* (C): $y = x^4 + 4mx^3 - 2x^2 - 12mx$ *có trục đối xứng song song với* Oy.

Giải

Giả sử đồ thị hàm số có trục đối xứng song song với Oy là x=a (a≠0). Khi đó, với phép biến đổi toạ độ:

$$\begin{cases} X = x - a \\ Y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + a \\ y = Y \end{cases}$$

hàm số $Y = (X + a)^4 + 4m(X + a)^3 - 2(X + a)^2 - 12m(X + a)$ là hàm số chẵn.

Ta có:

$$\begin{aligned} Y &= (X + a)^4 + 4m(X + a)^3 - 2(X + a)^2 - 12m(X + a) \\ &= X^4 + 4a^2X^2 + a^4 + 4aX^3 + 2a^2X^2 + 4a^3X + 4m(X^3 + 3X^2a + 3Xa^2 + a^3) - \\ &\qquad - 2(X^2 + 2Xa + a^2) - 12m(X + a) \\ &= X^4 + 4(a + m)X^3 + 2(3a^2 + 6am - 1)X^2 + 4(a^3 + 3ma^2 - a - 3m)X + \\ &\qquad + a^4 + 4ma^3 - 2a^2 - 12ma. \qquad (1) \end{aligned}$$

Hàm số (1) là hàm số chẵn

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(a + m) = 0 \\ 4(a^3 + 3ma^2 - a - 3m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

Vậy, với $m = \pm 1$ đồ thị hàm số có trục đối xứng song song với Oy.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, với yêu cầu tìm điều kiện của tham số để đồ thị hàm số $y = f(x)$ nhận đường thẳng $x = a$ làm trục đối xứng, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Với phép biến đổi toạ độ:

$$\begin{cases} X = x - a \\ Y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + a \\ y = Y \end{cases}$$

hàm số có dạng:

$$Y = f(X + a) \Leftrightarrow Y = F(X) \qquad (2)$$

Bước 2: Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = a$ làm trục đối xứng

$\Leftrightarrow$ hàm số (2) là hàm số chẵn $\Rightarrow$ Giá trị của *tham số*.

Bước 3: Kết luận.

Ví dụ 12: *Cho hàm số* $y = \dfrac{x - 1}{x + 1}$. *Chứng minh rằng đường thẳng* $y = x + 2$ *là trục đối xứng của đồ thị hàm số.*

✍ *Giải*

Đường thẳng $y = x + 2$ là trục đối xứng của đồ thị hàm số $\Leftrightarrow$ các đường thẳng vuông góc với đường thẳng $y = x + 2$ (có dạng $y = -x + m$) nếu cắt đồ thị tại A và B thì trung điểm I của AB phải thuộc đường thẳng $y = x + 2$.

Hoành độ giao điểm A, B là các nghiệm của phương trình:

$$\frac{x-1}{x+1} = -x + m \Leftrightarrow x^2 - (m-2)x - 1 - m = 0 \qquad (1)$$

Giả sử x_A, x_B là các nghiệm của (1) thì:

$$\begin{cases} x_A + x_B = m - 2 \\ x_A x_B = -m - 1 \end{cases}.$$

Gọi I là trung điểm của AB; ta có:

$$I: \begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = -x_I + m \end{cases} \Leftrightarrow I\left(\frac{m-2}{2}; \frac{m+2}{2}\right).$$

Thay toạ độ của I vào phương trình đường thẳng $y = x + 2$, ta được:

$$\frac{m+2}{2} = \frac{m-2}{2} + 2 \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ (luôn đúng)} \Leftrightarrow \text{I thuộc đường thẳng } y = x + 2.$$

Vậy, đường thẳng $y = x + 2$ là trục đối xứng của đồ thị hàm số.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để thực hiện yêu cầu"*Chứng minh rằng đường thẳng* (d): $y = ax + b$ *là trục đối xứng của đồ thị hàm số* $y = f(x)$", ta thực hiện như sau:

Bước 1: Gọi (Δ) là đường thẳng vuông góc với (d), suy ra phương trình của (Δ): $y = -\dfrac{1}{a}x + m$.

Bước 2: Giả sử (Δ) cắt đồ thị hàm số tại hai điểm A, B. Khi đó hoành độ của A, B là nghiệm của phương trình:

$$f(x) = -\frac{1}{a}x + m \Leftrightarrow f(x) + \frac{1}{a}x - m = 0. \qquad (1)$$

Sử dụng hệ thức viét ta được:

$$\begin{cases} x_A + x_B \\ x_A x_B \end{cases}.$$

Bước 3: Gọi I là trung điểm AB, ta có:

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = -\dfrac{1}{a}x_I + m \end{cases}.$$

Thay toạ độ của I vào (d) $\Rightarrow$ nhận xét $I \in (d)$.

Bước 4: Vậy, ta khẳng định được (d) là trục đối xứng của đồ thị hàm số.

Trong bài toán này ta không cần tìm điều kiện của tham số m để phương trình (1) có nghiệm.

Ví dụ 3: *Tìm hai điểm* A, B *nằm trên đồ thị* (C) *và đối xứng nhau qua* (d), *biết:*

$$(C): y = \frac{x^2}{x+1} \text{ và } (d): y = x + 1.$$

Giải

A, đối xứng nhau qua (d)

$\Rightarrow AB \perp (d)$ và trung điểm I của AB thuộc (d).

Vì $AB \perp (d): y = x + 1 \Rightarrow (AB): y = -x + m$.

Hoành độ giao điểm A, B là nghiệm của phương trình:

$$\frac{x^2}{x+1} = -x + m \Leftrightarrow g(x) = 2x^2 - (m-1)x - m = 0. \quad (1)$$

Để A, B tồn tại thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta_{(g)} > 0 \\ g(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow (m-1)^2 + 8m > 0 \Leftrightarrow m^2 + 6m + 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m > -3 + \sqrt{8} \\ m < -3 - \sqrt{8} \end{bmatrix}.$$

Khđó, giả sử x_A, x_B là các nghiệm của (1) thì:

$$\begin{cases} x_A + x_B = \dfrac{m-1}{2} \\ x_A x_B = -\dfrac{m}{2} \end{cases}$$

và vì I là trung điểm của AB nên:

$$I: \begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = -x_I + m \end{cases} \Leftrightarrow I\left(\frac{m-1}{4}; \frac{3m-1}{4}\right).$$

Điểm $I \in (d) \Leftrightarrow \dfrac{3m-1}{4} = \dfrac{m-1}{4} + 1 \Leftrightarrow m = 1$.

Với $m = -1$, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x_B = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}; 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ B\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}; 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}.$$

☞ ***Nận xét***: Như vậy, để thực hiện yêu cầu"*Tìm hai điểm* A, B *thuộc đồ thị hàm số* $y = x$) *đối xứng qua đường thẳng* (d): $y = ax + b$", ta thực hiện như sau:

Bước 1: Tìm miền xác định D của hàm số $y = f(x)$.

Bước 2: Gọi (Δ) là đường thẳng vuông góc với (d), suy ra phương trình của (Δ) có dạng $y = -\dfrac{1}{a}x + m$.

Bước 3: Giả sử (Δ) cắt đồ thị hàm số tại hai điểm A, B. Khi đó hoành độ của A, B là nghiệm của phương trình:

$$f(x) = -\frac{1}{a}x + m \Leftrightarrow f(x) + \frac{1}{a}x - m = 0. \quad (1)$$

Để tồn tại A, B thì (1) phải có hai nghiệm phân biệt thuộc D, từ đó suy ra giá trị của ***tham số***.

Sử dụng hệ thức viét ta được

$$\begin{cases} x_A + x_B \\ x_A x_B \end{cases}.$$

Bước 4: Gọi I là trung điểm AB, ta có:

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = -\dfrac{1}{a}x_I + m \end{cases}.$$

- Hai điểm A, B đối xứng qua đường thẳng (d) $\Leftrightarrow I \in (d) \Leftrightarrow m$.
- Thay m vào (1) ta có được hoành độ A, B là x_A, x_B.
- Khi đó: $A(x_A; -\frac{1}{a}x_A + m)$ & $B(x_B; -\frac{1}{a}x_B + m)$.

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài tập 1:

a. Qua phép đối xứng trục $Đ_a$ những điểm nào biến thành chính nó.

b. Nếu phép đối xứng trục $Đ_a$ biến điểm M thành điểm M' thì nó biến điểm M' thành điểm nào ?

c. Nếu phép đối xứng trục $Đ_a$ biến hình (**H**) thành hình (**H'**) thì nó biến hình (**H'**) thành hình nào ?

Bài tập 2: Chứng minh rằng:

a. Hợp thành của một số chẵn các phép đối xứng trục có trục đối xứng song song là một phép tịnh tiến.

b. Hợp thành của một số lẻ các phép đối xứng trục có trục đối xứng song song là một phép đối xứng trục.

Bài tập 3: Cho phép đối xứng trục $Đ_a$ qua đường thẳng (a) và phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{v}$ vuông góc với (a). Chứng tỏ rằng:

a. Hợp thành của $Đ_a$ và T là phép đối xứng trục.

b. Hợp thành của T và $Đ_a$ là phép đối xứng trục.

Bài tập 4: Cho góc nhọn xOy và một điểm A nằm trong góc đó. Hãy xác định điểm B trên Ox và điểm C trên Oy sao cho tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất.

Bài tập 5: Cho hypebol (H) với hai tiêu điểm F_1, F_2. Gọi M là điểm nằm trên (E) nhưng không nằm trên đường thẳng F_1F_2 và (a) là phân giác trong tại M của ΔMF_1F_2. Chứng minh rằng (a) chỉ cắt (H) tại điểm M duy nhất (đường thẳng (a) như thế được gọi là ***tiếp tuyến*** của (H) tại điểm M).

Bài tập 6: Cho parabol (P) có tiêu điểm F và đường chuẩn (d). Gọi M là điểm nằm trên (P), kẻ MH vuông góc với (d) ($H \in (d)$) và (a) là phân giác góc FMH. Chứng minh rằng (a) chỉ cắt (P) tại điểm M duy nhất (đường thẳng (a) như thế được gọi là ***tiếp tuyến*** của (P) tại điểm M).

Bài tập 7: Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn (O, R). Gọi H là trực tâm của tam giác.

a. Chứng minh rằng các điểm đối xứng của H qua các cạnh của ΔABC nằm trên đường tròn (O, R). Từ đó suy ra các đường tròn (HBC), (HCA), (HAB) và (O) bằng nhau.

b. Gọi O_1, O_2, O_3 lần lượt là tâm các đường tròn (HBC), (HCA), (HAB). Chứng minh ΔABC và $\Delta O_1O_2O_3$ bằng nhau.

Bài tập 8: Cho ΔABC. Gọi A', B', C' lần lượt là tâm các đường tròn bàng tiếp trong góc A, góc B, góc C. Chứng minh rằng các đường thẳng đi qua A' vuông góc với BC, qua B' vuông góc với AC, qua C' vuông góc với AB đồng quy.

Bài tập 9: Cho đường tròn (O, R) trên đó có hai điểm A và B, một đường tròn (O_1, R_1) tiếp xúc ngoài với (O) tại A. Một điểm M di động trên (O), tia MA cắt đường tròn (O_1) tại điểm thứ hai A_1. Qua A_1 vẽ đường thẳng song song với AB cắt tia MB tại B_1. Tìm tập hợp điểm B_1.

Bài tập 10: Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) và một đường thẳng (d). Dựng điểm M trên (d) sao cho tiếp tuyến kẻ từ M tới (O_1) và (O_2) tạo thành một góc nhận (d) làm đường phân giác.

Bài tập 11: Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) và một đường thẳng (d). Dựng hình vuông ABCD có hai đỉnh A, C lần lượt trên (O_1) và (O_2), hai đỉnh B và D trên (d).

Bài tập 12: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, tìm toạ độ điểm M' là điểm đối xứng với điểm M qua (d), biết:

a. (d): $3x + y - 1 = 0$ và M(1; –2). b. (d): $x + y - 2 = 0$ và M(1; 3).

c. (d): $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 1 + 3t \end{cases}$ và M(1; –4).

Bài tập 13: Tìm trên trục hoành điểm P sao cho tổng các khoảng cách từ P tới các điểm A và B là nhỏ nhất, biết A(1; 1) và B(3; 3), tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Bài tập 14: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, tìm phương trình đường thẳng (d_1) là ảnh của đường thẳng (d): $3x - 2y + 4 = 0$ qua phép đối xứng với trục (Δ), biết:

a. $(\Delta) \equiv Ox$. b. $(\Delta) \equiv Oy$. c. (Δ): $2x + 3y + 3 = 0$.

Bài tập 15: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, tìm phương trình đường thẳng (d_1) là ảnh của đường thẳng (d) qua phép đối xứng với trục (Δ), biết:

a. (d): $2x - y + 1 = 0$ và (Δ): $x + y = 0$.

b. (d): $x - 3y + 1 = 0$ và (Δ): $2x - 6y + 1 = 0$.

Bài tập 16: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, tìm phương trình đường thẳng (d_1) đối xứng với đường thẳng (d) qua đường thẳng (Δ), biết:

a. (d): $x + 2y - 13 = 0$ và (Δ): $2x - y - 1 = 0$.

b. (d): $x - 3y + 3 = 0$ và (Δ): $2x - 6y + 3 = 0$.

Bài tập 17: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 5 = 0$. Viết phương trình ảnh của đường tròn trên qua phép đối xứng có trục:

a. Ox. b. Oy. c. (d): $x + y + 1 = 0$.

Bài tập 18: Cho đường tròn:

$$(C): x^2 + y^2 - x - 2y + 1 = 0.$$

Xác định phương trình đường tròn (C_1) đối xứng với đường tròn (C) qua đường thẳng (d), biết:

a. (d): $x - 1 = 0$. b. (d): $y + 2 = 0$.

Bài tập 19: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$. Viết phương trình ảnh của đường tròn trên qua phép đối xứng có trục:

a. (d): $x + 1 = 0$. b. (d): $y - 2 = 0$.

c. (d): $x + y - 1 = 0$.

Bài tập 20: Cho ΔABC biết phương trình cạnh (BC): $4x - y + 3 = 0$ và hai đường phân giác trong của góc B, C có phương trình:

(d_B): $x - 2y + 1 = 0$ và (d_C): $x + y + 3 = 0$.

Lập phương trình cạnh AB, AC.

Bài tập 21: Cho ΔABC biết B(0; 1), C(1; 0) và trực tâm H(2; 1). Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Bài tập 22: Tìm hai điểm A, B nằm trên đồ thị (C) và đối xứng nhau qua (d), biết:

a. (C): $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ và (d): $y = x - 1$.

b. (C): $y = \dfrac{x^2 - 3x + 4}{2x - 2}$ và (d): $y = x$.

Bài tập 23: Giải thích tại sao phương trình:

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = m(x + 1)$$

với $m > 1$ có hai nghiệm phân biệt có tổng không đổi.

Bài tập 24: Xác định m để đồ thị hàm số (C) có trục đối xứng song song với Oy, biết:

a. (C): $y = x^4 + 4mx^3 - 2x^2 - 12mx$.

b. (C): $y = x^4 + 4mx^3 - 2(m - 1)x^2 - 2mx + 1$.

CHỦ ĐỀ 4 PHÉP QUAY VÀ PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. ĐỊNH NGHĨA PHÉP QUAY

Định nghĩa: *Trong mặt phẳng cho điểm* O *cố định và góc lượng giác* α *không đổi. Phép biến hình biến mỗi điểm* M *thành điểm* M' *sao cho* OM = OM' *và* (OM, OM') = α *được gọi là phép quay tâm* O *với góc quay* α.

Kí hiệu Q_O^{α} hay $Q_{(O,\alpha)}$.

2. ĐỊNH LÍ

Định lí: *Phép quay là một phép dời hình.*

3. PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

Định nghĩa: *Phép đối xứng qua điểm* O *là một phép dời hình biến mỗi điểm* M *thành* M' *đối xứng với* M *qua* O, *tức là* $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \vec{0}$.

Kí hiệu $Đ_O$ hay S_O.

Biểu thức toạ độ của phép đối xứng tâm: Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy, cho điểm I(a; b). Phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến điểm M(x; y) thành điểm M'(x'; y') với:

$$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}.$$

Tâm đối xứng của một hình: *Điểm* O *được gọi là tâm đối xứng của hình* **H** *nếu phép đối xứng tâm* $Đ_O$ *biến hình* **H** *thành chính nó, tức là* $Đ_O(\mathbf{H}) = \mathbf{H}$.

4. ỨNG DỤNG CỦA PHÉP QUAY

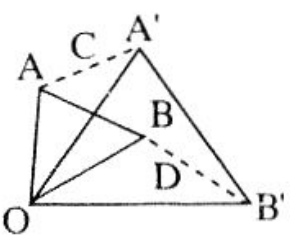
Bài toán 1: Cho hai tam giác đều OAB và OA'B' như hình vẽ. Gọi C và D lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AA' và BB'. Chứng minh rằng OCD là tam giác đều

Giải

Xét phép quay Q tâm O với góc quay bằng một góc lượng giác (OA, OB). Rõ rằng Q biến đoạn AA' thành đoạn BB'.

Do đó OC = OD và $C\hat{O}D = 60^0$.

Vậy, ta được ΔOCD đều.



Bài toán 2: Cho đường tròn (O; R) và hai điểm A, B cố định. Với mỗi điểm M, ta xác định điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$. Tìm quỹ tích điểm M' khi điểm M chạy trên (O; R).

✍ *Giải – Bạn đọc tự vẽ hình*

Gọi I là trung điểm của AB thì I cố định và $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$

Do đó, $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MI}$, tức là MM' nhận I làm trung điểm hay phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến điểm M thành M'.

Vậy khi M chạy trên đường tròn (O; R) thì quỹ tích M' là ảnh của đường tròn đó qua $Đ_I$.

Nếu ta gọi O' là điểm đối xứng của O qua điểm I thì quỹ tích của M' là đường tròn (O; R).

Bài toán 3: Cho hai đường tròn (O; R) và $(O_1; R_1)$ lần lượt tại M và M_1 sao cho A là trung điểm của MM_1.

✍ *Giải – Bạn đọc tự vẽ hình*

Giả sử ta đã dựng được đường thẳng d thoả mãn yêu cầu bài toán. Gọi $Đ_A$ là phép đối xứng qua A thì $Đ_A$ biến điểm M thành điểm M_1 và biến đường tròn (O; R) thành đường tròn (O'; R).

Vì M nằm trên (O; R) nên M_1 nằm trên (O'; R).

Mặt khác, M_1 lại nằm trên $(O_1; R_1)$ nên M_1 là giao điểm khác A của hai đường tròn (O'; R) và $(O_1; R_1)$.

Từ đó, suy ra cách dựng:

- Dựng đường tròn (O'; R) đối xứng với (O; R) qua A (O' là điểm đối xứng với O qua A).
- Lấy giao điểm M_1 của hai đường tròn (O'; R) và $(O_1; R_1)$, M_1 khác A.
- Đường thẳng (d) là đường thẳng đi qua A và M_1.

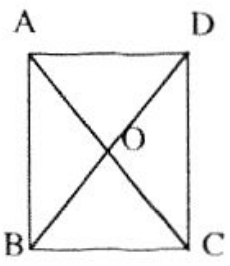
B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: TÌM PHÉP QUAY (PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM) BIẾN HÌNH (H_1) THÀNH HÌNH (H_2)

Phương pháp áp dụng

Sử dụng định nghĩa và tính chất của phép quay (phép đối xứng tâm).

Ví dụ 1: Với hình vuông ABCD, ta nhận thấy:



$Q_{(A,90^0)}(B) = D$; $Q_{(A,90^0)}(D) = B$.

$Q_{(C,90^0)}(B) = D$; $Q_{(C,90^0)}(D) = B$.

$Q_{(O,90^0)}(A) = D$; $Q_{(O,90^0)}(D) = C$;

$Q_{(O,90^0)}(C) = B$; $Q_{(O,90^0)}(B) = A$;

$\Rightarrow Q_{(O,90^0)}(ABCD) = DCBA$.

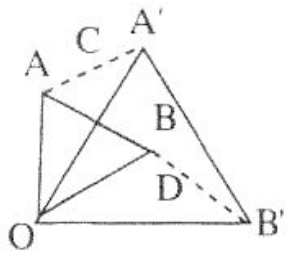
$Q_{(O,180^0)}(A) = C$; $Q_{(O,180^0)}(D) = B$; $Q_{(O,180^0)}(C) = A$; $Q_{(O,180^0)}(B) = D$;

$\Rightarrow Q_{(O,180^0)}(ABCD) = CBAD$.

Ví dụ 2: *Cho hai tam giác đều* OAB *và* OA'B' *như hình vẽ. Gọi* C *và* D *lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng* AA' *và* BB'.

a. *Tìm phép quay* Q *biến đoạn* AA' *thành đoạn* BB'.

b. *Chứng minh rằng* OCD *là tam giác đều.*



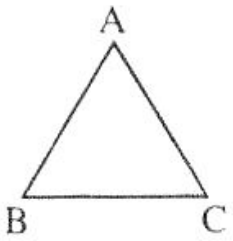
✍ *Giải*

a. Xét phép quay Q tâm O với góc quay bằng một góc lượng giác (OA, OB). Rõ rằng Q biến đoạn AA' thành đoạn BB'.

Do đó OC = OD và $C\hat{O}D = 60^0$.

b. Vậy, ta được ΔOCD đều.

☞ ***Chú ý***: Khi đã có kiến thức về phép quay (với giả thiết của góc định hướng) các em học sinh cần vẽ hình một cách chính xác. Thí dụ với giả thiết "*Cho tam giác đều* ABC *với* (AB, AC) = (BC, BA) = (CA, CB) = 60^{0}", chúng ta sẽ có hình vẽ như hình bên.



Ví dụ 3: (Bài 38/tr 11 – Sbt): *Cho tam giác đều* ABC *với* (AB, AC) = (BC, BA) = (CA, CB) = 60^0. *Hãy kể tên những phép dời hình biến tam giác* ABC *thành chính nó.*

✍ *Giải*

Gọi f là phép dời hình thoả mãn điều kiện đầu bài, tức:

$f(ABC) \in \{ABC, ACB, BCA, BAC, CAB, CBA\}$

từ đó, dễ thấy có 6 phép dời hình biến ΔABC thành một trong 6 tam giác kể trên.

Ta lần lượt có:

- Nếu f(ABC) = ABC thì f là phép đồng nhất.
- Nếu f(ABC) = ACB thì f là phép đối xứng qua đường trung trực của cạnh BC.
- Nếu f(ABC) = BCA thì f là phép quay tâm O (với O là tâm của ΔABC) góc quay 120^0.
- Nếu f(ABC) = BAC thì f là phép đối xứng qua đường trung trực của cạnh AB.
- Nếu f(ABC) = CAB thì f là phép quay tâm O (với O là tâm của ΔABC) góc quay -120^0.
- Nếu f(ABC) = CBA thì f là phép đối xứng qua đường trung trực của cạnh AC.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên với việc xác định được tập giá trị của phép dời hình f chúng ta khẳng định được số phép dời hình thoả mãn điều kiện đầu bài. Ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ một trường hợp khác.

Ví dụ 4: (Bài 41/tr 11 – Sbt): *Hãy chỉ ra các phép dời hình biến hình vuông* ABCD *thành chính nó.*

✍ *Giải*

Gọi O là tâm hình vuông ABCD và f là phép dời hình thoả mãn điều kiện đầu bài, tức:

$f(O) = O, \qquad f(A) \in \{A, B, C, D\}.$

Ta lần lượt có:

- Nếu $f(A) = A$ thì f là phép đồng nhất hoặc phép đối xứng trục AC.
- Nếu $f(A) = B$ thì f là phép đối xứng qua đường trung trực của cạnh AB hoặc phép quay tâm O góc quay (OA, OB).
- Nếu $f(A) = C$ thì f là phép đối xứng qua đường thẳng BD hoặc phép đối xứng tâm O.
- Nếu $f(A) = D$ thì f là phép đối xứng qua đường trung trực của cạnh AD hoặc phép quay tâm O góc quay $(OA, OD) = 3(OA, OB)$.

Ví dụ 5: *Cho hai đường tròn* (C_1) *và* (C_2) *lần lượt có tâm* O_1, O_2 *và đều có bán kính* R. *Tìm phép đối xứng tâm biến* (C_1) *thành* (C_2).

✍ *Giải*

Gọi O là trung điểm của O_1O_2.

Lấy M_1 tuỳ ý thuộc (C_1) và gọi M_2 là ảnh của M_1 qua $Đ_O$, ta có:

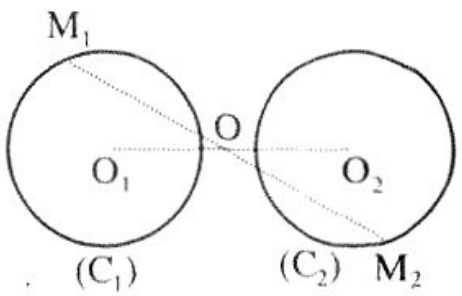
$OM_1 = OM_2$,

$M_1\hat{O}O_1 = M_2\hat{O}O_2$ – đối đỉnh

$OO_1 = OO_2$,

$\Rightarrow \Delta M_1OO_1 = \Delta M_2OO_2$ (c.g.c)

$O_2M_2 = O_1M_1 = R \Leftrightarrow M_2 \in (C_2)$



Ngược lại: lấy M_2 là một điểm tuỳ ý thuộc (C_2) và gọi M_1 là tạo ảnh của nó qua $Đ_O$ – chứng minh tương tự ta được $M_1 \in (C_1)$.

Vậy (C_2) là ảnh của (C_1) qua $Đ_O$.

Vấn đề 2: TÂM ĐỐI XỨNG CỦA MỘT HÌNH

Ví dụ 1: (Bài 16/tr 19 – Sgk): *Chỉ ra các tâm đối xứng của các hình sau đây:*

a. *Hình gồm hai đường thẳng cắt nhau.*

b. *Hình gồm hai đường thẳng song song.*

c. *Hình gồm hai đường tròn bằng nhau.*

d. *Đường elip.*

e. *Đường Hypecbol.*

✍ *Giải*

a. Tâm đối xứng là giao điểm của hai đường thẳng đó.

b. Tâm đối xứng là một điểm O bất kì nằm trên đường thẳng Δ song song và cách đều hai đường thẳng đó.

c. Tâm đối xứng là trung điểm của đoạn thẳng nối hai tâm của hai đường tròn.
d. Tâm đối xứng là giao điểm của hai trục đối xứng.
e. Tâm đối xứng là giao điểm của hai đường tiệm cận.

Vấn đề 3: GIẢI BÀI TOÁN ĐỊNH TÍNH

Phương pháp áp dụng

Ta hường gặp các dạng yêu cầu sau:

Dạng 1: Chứng minh $(\mathbf{H}_1)$ là ảnh của $(\mathbf{H}_2)$ qua phép quay tâm O với góc quay α (hoặc qua phép đối xứng tâm O), ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy điểm M_1 tuỳ ý thuộc $(\mathbf{H}_1)$, ta đi chứng minh $M_2 = Q_O^{\alpha}(M_1) \in (\mathbf{H}_2)$ (hoặc $M_2 = S_O(M_1) \in (\mathbf{H}_2)$).

Bước 2: Ngược lại, lấy điểm M_2 tuỳ ý thuộc $(\mathbf{H}_2)$, ta đi chứng minh $M_1 = Q_O^{\alpha}(M_2) \in (\mathbf{H}_1)$ (hoặc $M_1 = S_O(M_2) \in (\mathbf{H}_1)$).

Dạng 2: Chứng minh tính chất K, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định một hoặc nhiều phép quay (hoặc phép đối xứng tâm) để thiết lập mối liên kết giữa các yếu tố.

Bước 2: Sử dụng các tính chất của phép quay để giải các yêu cầu của bài toán.

Ví dụ 1: (Bài 30/tr 10 – Sbt): *Cho hai điểm phân biệt* A, B. *Chứng minh rằng nếu phép dời hình* f *sao cho* f(A) = B, f(B) = A *thì* f *là phép đối xứng trục hoặc là phép đối xứng tâm.*

Giải

Gọi I là trung điểm của AB và f(I) = I', suy ra:

$$\begin{cases} AI = BI' \\ BI = AI' \\ A, B, I' \text{ thẳng hàng} \end{cases} \Rightarrow I \equiv I'.$$

Khi đó, gọi (d) là đường trung trực của AB thì f(d) = (d).

Với hai điểm C, C' thuộc (d) và đối xứng qua I, chỉ có thể xảy ra các trường hợp:

- Nếu f(C) = C thì f(ΔABC) = ΔBAC nên f là phép đối xứng trục d.
- Nếu f(C) = C' thì f(ΔABC) = ΔBAC' nên f là phép đối xứng tâm I.

Ví dụ 2: (Bài 31/tr 10 – Sbt): *Chứng minh rằng hợp thành của một số phép quay với tâm quay trùng nhau là một phép quay.*

Giải

Với các phép quay tâm O là Q_α, Q_β, ta có nhận xét về điểm M bất kỳ:

$$Q_\alpha(M) = M_1 \Rightarrow \begin{cases} (OM, OM_1) = \alpha \\ OM = OM_1 \end{cases}; \quad Q_\beta(M_1) = M_2 \Rightarrow \begin{cases} (OM_1, OM_2) = \beta \\ OM_1 = OM_2 \end{cases}.$$

Từ đó, suy ra:

$$\begin{cases}(OM, OM_2) = \alpha + \beta \\ OM = OM_2\end{cases} \Rightarrow Q_\beta(Q_\alpha(M)) = Q_{\alpha+\beta}(M).$$

Vậy, hợp thành của hai phép quay Q_α, Q_β cùng tâm O là một phép quay.

Kết luận hợp thành của một số phép quay với tâm quay trùng nhau là một phép quay với tâm đó và có góc quay bằng tổng các góc quay của các phép quay đã cho.

Ví dụ 3: (Bài 32 a, b/tr 10 – Sbt): *Chứng minh rằng*:

a. *Hợp thành của hai phép đối xứng trục có trục đối xứng đồng quy là một phép quay.*

b. *Mỗi phép quay đều có thể xem là hợp thành của hai phép đối xứng trục có trục đối xứng cắt bằng nhiều cách.*

✍ *Giải – Bạn đọc tự vẽ hình theo thứ tự các bước thực hiện*

a. Gọi $Đ_a$, $Đ_b$ theo thứ tự là các phép đối xứng trục a, b có $a \cap b = \{O\}$ và f là hợp thành của $Đ_a$ và $Đ_b$.

Với hai điểm A, B theo thứ tự thuộc a, b sao cho góc $\widehat{AOB}$ không tù và đặt:

$\alpha = (OA, OB)$, khi đó $|\alpha| = \widehat{AOB}$ là góc giữa a và b.

Với mọi điểm M khác O, giả sử $Đ_a(M) = M_1$ và $Đ_b(M_1) = M_2$.

Gọi H, K theo thứ tự là trung điểm MM_1, M_1M_2, ta có:

$$OM = OM_1 = OM_2, \quad (1)$$

$$(OM, OM_2) = (OM, OM_1) + (OM_1, OM_2)$$
$$= 2(OH, OM_1) + (OM_1, OK) = 2(OH, OK) = 2\alpha. \quad (2)$$

Vậy, hợp thành f của hai phép đối xứng trục $Đ_a$, $Đ_b$ là phép quay tâm O góc quay 2α.

b. Với phép quay Q_α tâm O, lấy đường thẳng a đi qua O và gọi $b = Q_{\frac{\alpha}{2}}(a)$, ta có ngay:

$$Q_\alpha = Đ_b(Đ_a).$$

Và vì có nhiều cách chọn đường thẳng a nên có nhiều phép đối xứng trục $Đ_a$ và $Đ_b$ có hợp thành là $T_{\vec{v}}$.

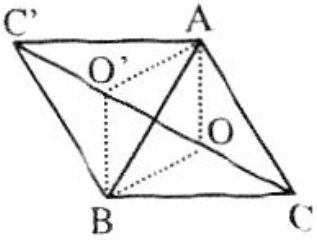
☞ ***Chú ý***: Chúng ta sẽ sử dụng kết quả trong ví dụ trên cho một số bài toán.

Ví dụ 4: (Bài 39/tr 11 – Sbt): *Cho tam giác đều* ABC *với* $(AB, AC) = (BC, BA) = (CA, CB) = 60^0$. *Gọi* Q_A, Q_B *là các phép quay góc quay* 60^0. *Gọi* f *là phép hợp thành của* Q_B *và* Q_A.

a. *Phép* f *biến các điểm* A, B, C *thành điểm nào* ?

b. *Phép* f *là phép gì* ?

c. *Phép hợp thành của* Q_A *và* Q_B *là phép gì* ?



✍ *Giải*

a. Gọi C' là điểm đối xứng với C qua AB, ta lần lượt có:

$Q_B(A) = C'$, $Q_A(C') = B \Rightarrow f(A) = B$.

$Q_B(B) = B$, $Q_A(B) = C \Rightarrow f(B) = C$.

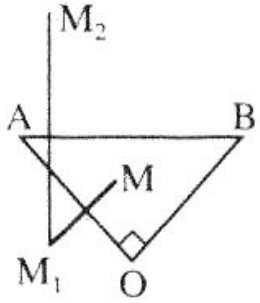
$Q_B(C) = A$, $Q_A(A) = A \Rightarrow f(C) = A$.

từ đó, kết luận f biến các điểm A, B, C thành B, C, A.

b. Từ kết quả câu a) là f(ABC) = BCA, nếu gọi O là tâm của ΔABC thì f chính là phép quay tâm O góc quay 120^0.

c. Thực hiện tương tự câu a), phép hợp thành của Q_A và Q_B là phép quay tâm O' góc quay 120^0, trong đó O' là tâm của $\Delta ABC'$.

Ví dụ 5: (Bài 42/tr 11 – Sbt): *Cho hai phép quay* Q_A, Q_B *có tâm quay là hai điểm phân biệt* A, B *và có cùng góc quay* 90^0. *Gọi* f *là hợp thành của* Q_A *và* Q_B, f' *là hợp thành của* Q_B *và* Q_A. *Hãy chứng tỏ rằng* f *và* f' *là những phép đối xứng tâm và nêu rõ cách xác định tâm đối xứng của các phép đó.*



Giải

Lấy điểm O như hình bên sao cho ΔOAB vuông cân tại O. Ta lần lượt:

a. Với phép dời hình f, ta có:

- Q_A là hợp thành của hai phép đối xứng trục $Đ_{AO}$ và $Đ_{AB}$.
- Q_B là hợp thành của hai phép đối xứng trục $Đ_{AB}$ và $Đ_{BO}$.

Suy ra f là hợp thành của bốn phép đối xứng trục theo thứ tự $Đ_{AO}$, $Đ_{AB}$, $Đ_{AB}$ và $Đ_{BO}$, tức là hợp thành của hai phép đối xứng trục $Đ_{AO}$ và $Đ_{BO}$.

Mặt khác, ta nhận thấy:

$OA \perp OB \Rightarrow$ f là phép quay tâm O góc quay 180^0

$\Leftrightarrow$ f là phép đối xứng tâm O.

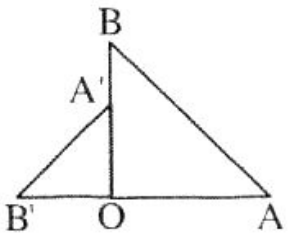
Từ hình vẽ ta thấy điểm O được xác định sao cho ΔOAB vuông cân tại O và:

$(AO, AB) = (BA, BO) = 45^0$ hoặc nói cách khác $(OB, OA) = 90^0$.

b. Tương tự, phép dời hình f' là phép đối xứng tâm O' sao cho $\Delta O'AB$ vuông cân tại O' và $(O'A, O'B) = 90^0$.

Ví dụ 6: (Bài 13/tr 18 – Sgk): *Cho hai tam giác vuông cân* OAB *và* OA'B' *có chung đỉnh* O *sao cho* O *nằm trên đoạn thẳng* AB' *và nằm ngoài đoạn thẳng* A'B (*hình bên*). *Gọi* G *và* G' *lần lượt là trọng tâm các tam giác* OAA' *và* OBB'. *Chứng minh rằng* GOG' *là tam giác vuông cân.*

Giải



Xét phép quay Q tâm O góc quay 90^0, ta có ngay:

$\Delta OBB' = Q_O^{90^0}(\Delta OAA') \Rightarrow G' = Q_O^{90^0}(G)$

$\Rightarrow G\hat{O}G' = 90^0$ và $OG' = OG$.

Vậy, ta được $\Delta GOG'$ là tam giác vuông cân.

Ví dụ 7: *Cho đường tròn* (O) *với ba dây* AB, MN, PQ *cắt nhau tại* I *sao cho* IA = IB *và* M, P *nằm cùng phía với* AB. *Gọi* E, F *lần lượt là giao điểm của* AB *với* PN. *Chứng minh rằng* IE = IF.

✍ *Giải – Bạn đọc tự vẽ hình theo thứ tự các bước thực hiện*

Lấy M', Q' lần lượt đối xứng với M, Q qua I.

Ta có Q'M' đối xứng với MQ qua I.

Do A, B đối xứng nhau qua I nên Q'M' cắt BI tại F' đối xứng với E qua I.

Suy ra:

IF' = IE .

Mặt khác A, B đối xứng nhau qua I nên A, B, M', Q' theo thứ tự đối xứng với B, A, M,Q qua I.

Mà B, A, M, Q ở trên đường tròn (O) nên A, B, M', Q' ở trên đường tròn (O') đối xứng với (O) qua I.

Lại có:

$\overline{IM} . \overline{IN} = \overline{IP} . \overline{IQ}$, $\overline{IM'} = -\overline{IM}$, $\overline{IQ'} = -\overline{IQ}$,

$\Rightarrow \overline{IM'} . = \overline{IP} . \overline{IQ'} \Rightarrow$ 4 điểm M', N, Q', P thuộc một đường tròn (K)

Vì:

- AB là trục đẳng phương của (O) và (O'),
- PN là trục đẳng phương của (O) và (K),
- Q'M' cắt AB tại F' nên PN đi qua F'.

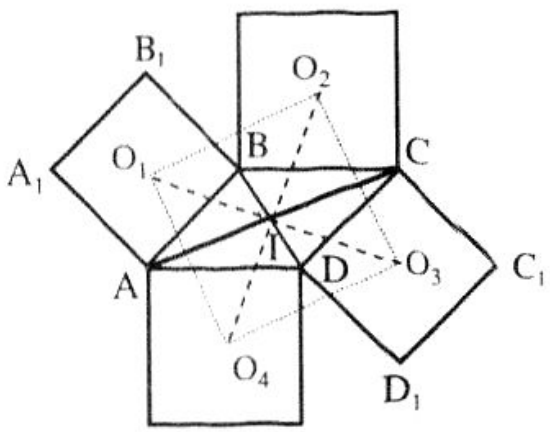
Lại có PN cắt AB tại F nên F ≡ F' ⇒ IF = IE, đpcm.

Ví dụ 8: (Bài 44/tr 11 – Sbt): *Về phía ngoài hình bình hành* ABCD *dựng các hình vuông có cạnh lần lượt là* AB, BC, CD, DA. *Chứng minh rằng bốn tâm của hình vuông đó là đỉnh của một hình vuông.*

✍ *Giải*

Gọi O_1, O_2, O_3, O_4 lần lượt là tâm các hình vuông có cạnh là AB, BC, CD, DA và I là tâm hình bình hành ABCD thì I là tâm đối xứng của ABCD và vì :

- A_1B song song và bằng DC_1 nên A_1BC_1D là hình bình hành, suy ra I là trung điểm của O_1O_3.
- Tương tự, I cũng là trung điểm của O_2O_4.



Từ đó, suy ra $O_1O_2O_3O_4$ là hình bình hành.

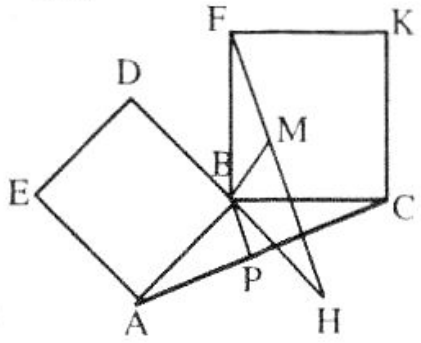
Mặt khác, bằng việc sử dụng phép quay với góc quay 90^0 chúng ta dễ nhận thấy ΔIO_1O_2 vuông cân tại I.

Vậy, ta được $O_1O_2O_3O_4$ là hình vuông.

Ví dụ 3: *Cho* ΔABC *có các đỉnh được kí hiệu theo hướng âm, dựng ở ngoài tam giác ấy hai hình vuông* ABDE *và* BCKF. *Gọi* P *là trung điểm cạnh* AC, H *là điểm đối xứng của* D *qua* B, M *là trung điểm đoạn* FH.

a. *Xác định ảnh của hai vectơ* $\overrightarrow{BA}$ *và* $\overrightarrow{BP}$ *trong phép quay tâm* B, *góc quay* 90^0.

b. *Chứng minh rằng* DF = 2BP *và* DF *vuông góc với* BP.



Giải

a. Ta có:

$$\begin{cases} BA = BH \text{ (cùng bằng BD)} \\ (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BH}) = 90^0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Q_B^{90^0}(A) = H \;\&\; Q_B^{90^0}(\overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{BH}$$

Vì $Q_B^{90^0}(A) = H$, $Q_B^{90^0}(C) = F$ nên $Q_B^{90^0}(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{HF}$

b. Vì P là trung điểm của AC nên theo tính chất của phép quay ta có ảnh của P qua phép quay trên trung điểm M của HF.

Do đó:

$$Q_B^{90^0}(\overrightarrow{BP}) = \overrightarrow{BM} \Rightarrow \begin{cases} BP = BM \\ BP \perp BM \end{cases}.$$

Mặt khác:

$$BM = \frac{1}{2}DE \text{ và } BM \,//\, DF \Rightarrow BP = \frac{1}{2}DF \text{ và } DF \perp BP.$$

Vấn đề 4: GIẢI BÀI TOÁN ĐỊNH LƯỢNG

Phương pháp áp dụng

Bằng việc thiết lập được các phép quay (phép đối xứng tâm) thích hợp, ta có thể tính toán được các yếu tố trong một hình.

Ví dụ 1: *Cho* ΔABC *có* AM *và* CN *là các trung tuyến. Chứng minh rằng nếu* $\widehat{BAM} = \widehat{BCN} = 30^0$ *thì* ΔABC *đều.*

Giải

Tứ giác ACMN có $\widehat{NAM} = \widehat{MCN} = 30^0$ nên nội tiếp trong một đường tròn tâm O bán kính R và $\widehat{MON} = 2\widehat{NAM} = 60^0$.

Xét các phép đối xứng tâm N và tâm M.

$S_{(N)}$: $A \mapsto B$ và $(O) \mapsto (O_1) \Rightarrow B \in (O_1)$ vì $A \in (O)$.

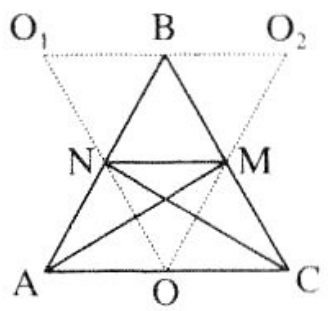
$S_{(M)}$: $C \mapsto B$ và $(O) \mapsto (O_2) \Rightarrow B \in (O_2)$ vì $C \in (O)$

Trong ΔOO_1O_2, ta có nhận xét:

$OO_1 = OO_2 = 2R$,

$\widehat{MON} = 2\widehat{BAM} = 60^0$,

suy ra ΔOO_1O_2 là tam giác đều.



Mặt khác:

$O_1B + O_2B = R + R = 2R = O_1O_2$ nên B là trung điểm của O_1O_2.

Từ đó suy ra hai ΔABC và ΔOO_1O_2 đồng dạng (vì cùng đồng dạng với ΔBMN) và vì ΔOO_1O_2 đều nên ΔABC đều.

Vấn đề 5: TÌM TẬP HỢP ĐIỂM M

Phương pháp áp dụng

Ta thực hiện theo các bước sau:

- ***Bước 1:*** Tìm một phép quay Q_O^{α} (hoặc phép đối xứng tâm S_O), biến điểm E di động thành điểm M .
- ***Bước 2:*** Tìm tập hợp (**H**) của các điểm E.
- ***Bước 3:*** Kết luận tập hợp các điểm M là ảnh của (**H**) trong phép quay Q_O^{α} (hoặc phép đối xứng tâm S_O).

Ví dụ 1: (Bài 18/tr 19 – Sgk): *Cho đường tròn* (O; R), *đường thẳng* Δ *và điểm* I. *Tìm điểm* A *trên* (O; R) *và điểm* B *trên* Δ *sao cho* I *là trung điểm của đoạn thẳng* AB.

✍ *Giải – Bạn đọc tự vẽ hình*

Ta thực hiện như sau:

- Dựng $\Delta' = Đ_I(\Delta)$ và giả sử Δ' cắt (O; R) tại A.
- Nối IA cắt Δ tại B.

Khi đó I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Bài toán chỉ có nghiệm khi đường thẳng Δ' cắt đường tròn (O; R).

Ví dụ 2: (Bài 33/tr 10 – Sbt): *Cho đường tròn* (O) *và một điểm* I *không nằm trên đường tròn đó. Với mỗi điểm A thay đổi trên đường tròn, ta xét hình vuông* ABCD *có tâm là* I. *Tìm quỹ tích các điểm* B, C, D.

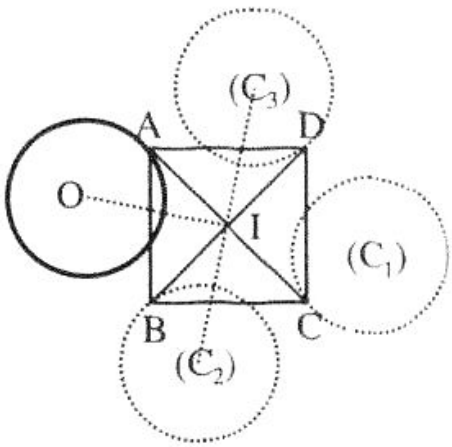
✍ *Giải*

Ta lần lượt có nhận xét:

$$\begin{cases} Đ_I(A) = C \\ A \in (O) \end{cases} \Rightarrow C \in (C_1) = Đ_I((C)).$$

$$\begin{cases} Q_I^{90^0}(A) = B \\ A \in (O) \end{cases} \Rightarrow B \in (C_2) = Q_I^{90^0}((C)).$$

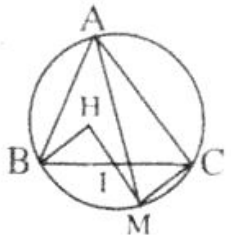
$$\begin{cases} Q_I^{-90^0}(A) = D \\ A \in (O) \end{cases} \Rightarrow D \in (C_3) = Q_I^{-90^0}((C)).$$



Ví dụ 3: (Bài 17/tr 19 – Sgk): *Cho hai điểm* B *và* C *cố định trên đường tròn* (O; R) *và một điểm* A *thay đổi trên đường tròn đó. Hãy dùng phép đối xứng tâm để chứng minh rằng trực tâm* H *của* ΔABC *nằm trên một đường tròn cố định.*

Giải

Gọi I là trung điểm BC và vẽ đường kính AM.



Ta có:

$BH \perp AC$ và $MC \perp AC \Rightarrow BH // MC$. (1)

$CH \perp AB$ và $MB \perp AB \Rightarrow CH // MB$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

BHCM là hình bình hành $\Rightarrow$ I là trung điểm HM.

Vậy, trực tâm H của ΔABC nằm trên một đường tròn cố định $(O'; R) = Đ_I((O; R))$.

Ví dụ 4: *Cho đường tròn* (O) *và dây cung* AB *cố định*, M *là một điểm di động trên* (O), M *không trùng* A, B. *Hai đường tròn* (O_1), (O_2) *qua* M, *theo thứ tự tiếp xúc với* AB *tại* A *và* B. *Gọi* N *là giao điểm thứ hai của* (O_1), (O_2).

a. *Chứng minh rằng đường thẳng* MN *luôn qua một điểm cố định.*

b. *Tìm tập hợp* N *khi* M *di động trên* (O).

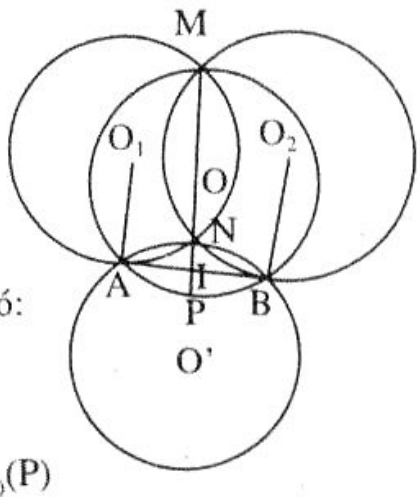
Giải

a. Gọi I là giao điểm của MN và AB, ta có:

$IA^2 = \overline{IM} . \overline{IN} = IB^2$ (1)

$\Rightarrow IA = IB$, do đó I là trung điểm của AB.

Vậy đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định I là trung điểm của AB.



b. Gọi P là điểm chung thứ hai của MN và (O), ta có:

$\overline{IP} . \overline{IM} = \overline{IA} . \overline{IB} = - IA^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$\overline{IP} . \overline{IM} = - \overline{IM} . \overline{IN} \Rightarrow \overline{IP} = - \overline{IN} \Rightarrow N = S_{(I)}(P)$

Vì tập hợp các điểm P là đường tròn (O) qua hai điểm A và B nên tập hợp các điểm N là đường tròn (O') bỏ đi hai điểm A và B với $(O') = S_{(I)}(O)$

Vấn đề 6: DỰNG HÌNH

Phương pháp áp dụng

Ta luôn thực hiện theo 4 bước đã biết.

Ví dụ 1: (Bài 12/tr 18 – Sgk): *Cho phép quay* Q *tâm* O *với góc quay* φ *và cho đường thẳng* (d). *Hãy nêu cách dựng ảnh* (d') *của* (d) *qua phép quay* Q.

Giải

Lấy hai điểm phân biệt A, B trên đường thẳng d, khi đó ta dựng:

$A' = Q_O(A)$ và $B' = Q_O(B)$.

Nối A' và B', đó chính là đường thẳng (d').

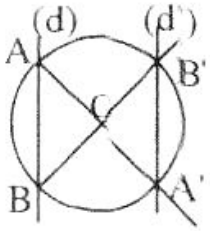
Ví dụ 2: (Bài 15/tr 18 – Sgk): *Cho phép đối xứng tâm* $Đ_O$ *và đường thẳng* (d) *không đi qua* O. *Hãy nêu cách dựng ảnh* (d') *của đường thẳng* (d) *qua* $Đ_O$. *Tìm cách dựng* (d') *mà chỉ sử dụng compa một lần và thước thẳng ba lần.*

✍ *Giải*

a. Lấy hai điểm phân biệt A, B trên đường thẳng (d), khi đó ta dựng:

$$A' = Đ_O(A) \text{ và } B' = Đ_O(B).$$

Nối A' và B', đó chính là đường thẳng d'.



b. Có thể thực hiện được, cụ thể:

- Lấy điểm A trên (d), dùng thước thẳng dựng tia AO.
- Dùng compa dựng đường tròn (O; OA), đường tròn này cắt đường thẳng (d) tại B và tia AO tại A'.
- Dùng thước thẳng dựng tia BO cắt đường tròn tại B'.
- Dùng thước thẳng nối A' với B' ta được đường thẳng (d') cần dựng.

Ví dụ 3: *Cho hai đường thẳng* (d_1) *và* (d_2), *hai điểm* A, G *không thuộc* (d_1), (d_2). *Hãy dựng* ΔABC *có trọng tâm* G *và hai đỉnh* B *và* C *ần lượt thuộc* (d_1) *và* (d_2).

✍ *Giải*

Phân tích: Giả sử đã dựng được ΔABC có trọng tâm G, hai đỉnh B và C lần lượt thuộc (d_1), (d_2). Gọi M là trung điểm cạnh BC thì M được xác định bởi:

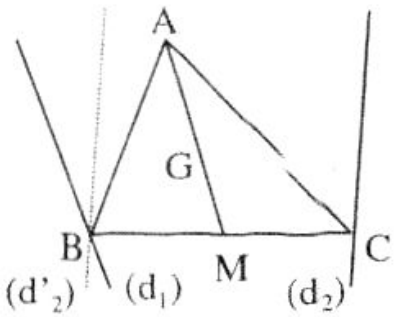
$$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}.$$

Thực hiện phép đối xứng tâm M:

$S_{(M)}$: $C \mapsto B$, $(d_2) \mapsto (d'_2)$.

Ta có $B \in (d'_2)$.

Vậy B là giao điểm của (d'_2) và (d_1).



Cách dựng: Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$.
- Dựng đường thẳng (d'_2) với $(d'_2) = S_{(M)}[(d_2)]$ và giả sử (d'_2) cắt (d_1) tại B
- Dựng điểm C với $C = S_{(M)}(B)$

thì ΔABC là tam giác cần dựng.

Chứng minh: Dựa vào cách dựng ta có:

- $B \in (d_1)$;
- $B \in (d'_2)$;
- $S_{(M)}[(d_2)] = (d'_2)$ và $C = S_{(M)}(B) \Rightarrow C \in (d_2)$
- M là trung điểm cạnh BC và $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG} \Rightarrow$ G là trọng tâm ΔABC.

Biện luận: Số nghiệm hình của bài toán bằng số điểm chung của (d_1) và (d'_2)

Ví dụ 4: (Bài 36/tr 10 – Sbt): *Cho hai đường thẳng* (d) *và* (d') *song song và một điểm* A *không ở trên* (d) *và* (d'). *Hãy dựng điểm* B *trên* (d) *và điểm* C *trên* (d') *sao cho* ABC *là tam giác đều, có các đỉnh được kí hiệu theo hướng dương.*

✍ *Giải – Bạn đọc tự vẽ hình theo thứ tự các bước thực hiện*

Phân tích: Giả sử đã dựng được tam giác đều ABC theo hướng dương. Thực hiện phép quay tâm A, góc 60^0.

$$Q_A^{60^0}: B \mapsto C$$

$$(d) \mapsto (d_1)$$

Vì $B \in (d)$ nên $C \in (d_1)$.

Vậy C là điểm chung của (d_1) và (d'). Ta cũng có $B = Q_A^{-60^0}(C)$.

Cách dựng: Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng đường thẳng (d_1) với $(d_1) = Q_A^{60^0}$ thì (d_1) là đường thẳng qua K và vuông góc với AK.
- (d_1) cắt (d') tại C.
- Dựng điểm B với $B = Q_A^{-60^0}(C)$. Tam giác ABC là tam giác phải dựng.

Chứng minh: Theo cách dựng ta có:

- $B \in (d)$, $C \in (d')$.
- $AC = AB$ và $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = -60^0 \Rightarrow$ ABC là tam giác đều và $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^0$.

Biện luận: Vì (d)//(d') nên ta luôn có một và chỉ một điểm chung C của (d_1) và (d'). Do đó bài toán có một nghệm hình.

Vấn đề 7: HỆ TOẠ ĐỘ ĐỐI VỚI PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM VÀ PHÉP QUAY

Phương pháp áp dụng

Sử dụng kết quả: Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy, cho điểm I(a; b). Phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến điểm M(x; y) thành điểm M'(x'; y') với:

$$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}.$$

Trong phần này chúng ta xem xét ba bài toán cơ bản và mong muốn thông qua đó các em có thể xây dựng được phương pháp giải bài toan tổng quát.

Dạng 1: Xác định điểm M_1 đối xứng với điểm M qua điểm I(a; b).

Ta có ngay I là trung điểm MM_1, do đó:

$$\begin{cases} x_M + x_{M_1} = 2a \\ y_M + y_{M_1} = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M_1} = 2a - x_M \\ y_{M_1} = 2b - y_M \end{cases}.$$

Đặc biệt: Nếu $I \equiv O(0; 0)$ thì với M(x; y) suy ra $M_1(-x; -y)$.

Dạng 2: Cho đường thẳng (d): Ax + By + C = 0. Xác định phương trình đường thẳng (d_1) đối xứng với đường thẳng (d) qua tâm I(a; b).

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy một điểm $A \in (d)$, từ đó xác định toạ độ điểm A_1 đối xứng với A qua I.

Bước 2: Vì $(d_1)//(d)$ suy ra (d_1): $Ax + By + \underline{D} = 0$.

Bước 3: Vì $A_1 \in (d_1) \Rightarrow$ giá trị của D,

Từ đó có được phương trình của (d_1).

Cách 2: Sử dụng tính chất phép đối xứng tâm sẽ biến đường thẳng song song hoặc trùng với nó.

Cách 3: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Với mỗi điểm $M(x; y) \in (d)$, suy ra tồn tại điểm $M_1(x_1; y_1) \in (d_1)$ nhận I làm trung điểm, ta được:

$$\begin{cases} x + x_1 = 2a \\ y + y_1 = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a - x_1 \\ y = 2b - y_1 \end{cases}. \quad (I)$$

Bước 2: Thay (I) vào phương trình của (d), ta được:

$$Ax_1 + By_1 - C - 2aA - 2bB = 0. \quad (1)$$

Bước 3: Viết lại (1) dưới dạng:

$$Ax + By - C - 2aA - 2bB = 0. \quad (2)$$

Đó chính là phương trình đường thẳng (d_1).

Dạng 3: Cho đường tròn (C): f(x, y) = 0. Xác định phương trình đường tròn (C_1) đối xứng với đường tròn (C) qua tâm $E(x_0; y_0)$ ($E \neq I$ là tâm của (C)).

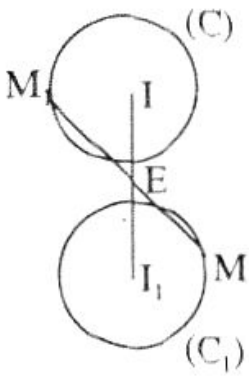
Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Chúng ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Với mỗi $M(x; y) \in (C_1)$ thì tồn tại điểm $M_1(x_1; y_1) \in (C)$ sao cho M đối xứng với M_1 qua $E(x_0; y_0)$

$\Leftrightarrow \exists\, x_1, y_1$ thoả mãn:

$$\begin{cases} f(x_1, y_1) = 0 \\ x_1 + x = 2x_0 \\ y_1 + y = 2y_0 \end{cases} \quad (I)$$



Bước 2: Khử x_1, y_1 từ hệ (I) ta được phương trình của đường tròn (C_1).

ABC

Cách 2. Chúng ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Gọi I, I_1 theo thứ tự là tâm đường tròn (C), (C_1) và R là bán kính đường tròn (C). Khi đó E là trung điểm của $II_1 \Rightarrow$ toạ độ điểm I_1.

Bước 2: Lập phương trình đường tròn (C_1) thoả mãn:

$$(C_1): \begin{cases} \text{tâm } I_1 \\ \text{bán kính R} \end{cases}.$$

Ví dụ 1: *Trong mặt phẳng toạ độ* Oxy, *tìm toạ độ điểm* M' *là điểm đối xứng với điểm* M(−2; 5) *qua*:

a. *Gốc* O. b. *Điểm* I(2; 1). c. *Điểm* I(−1; 1).

Giải

a. Ta có ngay M'(2; −5).

b. Sử dụng công thức trung điểm ta được M'(6; −3).

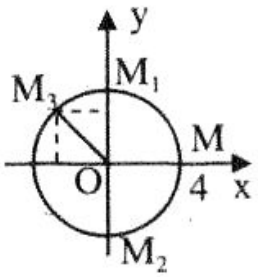
c. Sử dụng công thức trung điểm ta được M'(0; −3).

Ví dụ 2: *Tìm toạ độ ảnh của điểm* M(4; 0) *qua phép quay*:

a. *Tâm* O *góc quay* 90^0. b. *Tâm* O *góc quay* -90^0.

c. *Tâm* O *góc quay* 135^0.

Giải



a. Từ hình vẽ, ta suy ra $Q_O^{90^0}(M) = M_1(0; 4)$.

b. Từ hình vẽ, ta suy ra $Q_O^{-90^0}(M) = M_2(0; -4)$.

c. Từ hình vẽ, ta suy ra $Q_O^{135^0}(M) = M_3(x_3; y_3)$ với:

$$x_3 = -OM_3.\sin 45^0 = -OM.\sin 45^0 = -4.\frac{\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2},$$

$$y_3 = OM_3.\sin 45^0 = OM.\sin 45^0 = 4.\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

Vậy, ta được $M_3\left(-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)$.

Nhận xét: Như vậy, việc tìm toạ độ của điểm qua một phép quay phức tạp hơn hẳn so với phép đối xứng tâm. Và khi gặp những yêu cầu này để tường minh các em học sinh tốt nhất hãy vẽ hình ra.

Ví dụ 3: *Trong mặt phẳng toạ độ* Oxy, *tìm phương trình đường thẳng* (d') *đối xứng với đường thẳng* (d): x − 2y + 2 = 0 *qua*:

a. *Gốc* O. b. *Điểm* I(2; 0). c. *Điểm* I(1; 1).

Giải

a. Phép đối xứng tâm O biến mỗi điểm M(x; y) thành điểm M'(−x; −y).

Do đó bằng việc thay x bởi $-x$ và y bởi $-y$ vào phương trình của (d), ta được:

$(-x) - 2(-y) + 2 = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 2 = 0.$

Đó chính là phương trình đường thẳng (d') cần tìm.

b. Nhận xét rằng I thuộc (d) nên phép đối xứng tâm I biến đường thẳng (d) thành chính nó, tức (d'): $x - 2y + 2 = 0$.

c. Ta có các cách trình bày sau:

Cách 1. Với mỗi điểm $M(x; y) \in (d)$ tồn tại điểm $M_1(x_1; y_1) \in (d_1)$ nhận I làm trung điểm, ta được:

$$\begin{cases} x + x_1 = 2 \\ y + y_1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - x_1 \\ y = 2 - y_1 \end{cases}. \quad (I)$$

Thay (I) vào phương trình của (d), ta được:

$(2 - x_1) - 2(2 - y_1) + 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 - 2y_1 = 0.$ (1)

Viết lại (1) dưới dạng: $x - 2y = 0.$ (2)

Đó chính là phương trình đường thẳng (d').

Cách 2: Lấy một điểm $A(0; 1) \in (d)$, gọi A' là điểm đối xứng với A qua I thì $A'(2; 1)$.

- Vì (d')//(d): $x - 2y + 2 = 0 \Rightarrow$ (d): $x - 2y + C = 0$.
- Vì $A' \in (d') \Rightarrow C = 0$.

Vậy phương trình đường thẳng (d'): $x - 2y = 0$.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, phương trình của đường (C_1) là ảnh của (C): $f(x, y) = 0$ qua phép đối xứng tâm O sẽ có dạng $f(-x, -y) = 0$, tức thay x bằng $-x$ và y bằng $-y$ vào phương trình của (C).

Từ đó, ta có tổng quát đối với đường thẳng:

"Ảnh của đường thẳng (d): $Ax + By + C = 0$ *qua phép đối xứng tâm* O *có phương trình* $Ax + By - C = 0$".

Ngoài ra:

"Ảnh của đường thẳng (d): $Ax + By + C = 0$ *qua phép đối xứng tâm* $I \in (d)$ *chính là* (d)".

Tổng quát (Bài 19/tr 19 – Sgk): *Trong mặt phẳng toạ độ* Oxy, *cho đường thẳng* (Δ): $ax + by + c = 0$ *và điểm* $I(x_0; y_0)$. *Phép đối xứng tâm* $Đ_I$ *biến đường thẳng* (Δ) *thành đường thẳng* (Δ'). *Viết phương trình của* (Δ').

✍ *Giải*

Với mỗi điểm $M(x_0; y_0) \in (\Delta)$ (tức là $Ax_0 + By_0 + C = 0$), suy ra tồn tại điểm $M'(x; y) \in (\Delta')$ sao cho:

$$\begin{cases} x = 2a - x_0 \\ y = 2b - y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2a - x \\ y_0 = 2b - y \end{cases}.$$

Do đó, đường thẳng (Δ') sẽ có phương trình:

(Δ'): $A(2a - x) + B(2b - y) + C = 0 \Leftrightarrow (\Delta')$: $Ax + By - C - 2aA - 2bB = 0$

Ví dụ 1: *Tìm phương trình của đường thẳng* (d_1) *là ảnh của đường thẳng* (d): $x + 2y - 4 = 0$ *qua phép quay tâm* O *góc quay* 90^0.

✍ *Giải – Bạn đọc tự vẽ hình*

Ta có hai cách trình bày sau:

Cách 1 Lấy điểm $A(4; 0) \in (d)$ và $Q_O^{90^0}(A) = A_1(0; 4)$.

Khi đó, phương trình đường thẳng (d_1) được xác định bởi:

$$(d_1): \begin{cases} \text{qua } A_1(0;4) \\ (d_1) \perp (d) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \begin{cases} \text{qua } A_1(0;4) \\ (d_1): 2x - y + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): 2x - y + 4 = 0.$$

Cách 2 Lấy hai điểm A(4; 0) và B(0; 2) thuộc (d) và gọi:

$$A_1 = Q_O^{90^0}(A) \Rightarrow A_1(0; 4); \qquad B_1 = Q_O^{90^0}(B) \Rightarrow B_1(-2; 0).$$

Khi đó, phương trình đường thẳng (d_1) được xác định bởi:

$$(d_1): \begin{cases} \text{qua } A_1(0;4) \\ \text{qua } B_1(-2;0) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \frac{x}{-2} + \frac{y}{4} = 1 \Leftrightarrow (d_1): 2x - y + 4 = 0.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên để thuận lợi chúng ta đã chọn các điểm là giao điểm của (d) với các trục toạ độ.

Ví dụ 2: *Cho đường tròn* (C): $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$. *Xác định phương trình đường tròn* (C') *đối xứng với đường tròn* (C) *qua*:

a. *Gốc* O. b. *Điểm* E(2; 1). c. *Điểm* E(1; 2).

✍ *Giải*

a. Phép đối xứng tâm O biến mỗi điểm M(x; y) thành điểm M'(–x; –y), do đó bằng việc thay x bởi –x và y bởi –y vào phương trình của (C), ta được:

$$(-x)^2 + (-y)^2 - 4(-x) - 2(-y) + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x + 2y + 3 = 0.$$

Đóchính là phương trình đường tròn (C') cần tìm.

b. Nhận xét rằng E chính là tâm đường tròn (C) nên phép đối xứng tâm E biến đường ròn (C) thành chính nó, tức (C'): $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$.

c. Ta có hai cách trình bày sau:

Cách 1 Với mỗi $M(x; y) \in (C') \Leftrightarrow \exists M_1(x_1; y_1) \in (C)$ sao cho M đối xứng với M_1 qua E

$\Leftrightarrow \exists\, x_1, y_1$ thoả mãn:

$$\begin{cases} (x_1 - 2)^2 + (y_1 - 1)^2 = 2 \\ x_1 + x = 2 \\ y_1 + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - 2)^2 + (y_1 - 1)^2 = 2 \\ x_1 = 2 - x \\ y_1 = 4 - y \end{cases}$$

$\Rightarrow x^2 + (y - 3)^2 = 2.$

Vậy phương trình đường tròn (C'): $x^2 + (y - 3)^2 = 2$.

Cách 2: Xét đường tròn (C) có tâm I(2; 1) và bán kính $R = \sqrt{2}$.

Gọi I' là tâm đường tròn (C').

Vì (C) và (C') đối xứng qua điểm E $\Rightarrow$ E là trung điểm của II', do đó I'(0; 3).

Phương trình đường tròn (C') được cho bởi:

$$(C_1): \begin{cases} \text{tâm } I_1(0;3) \\ \text{bán kính } R = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow (C'): x^2 + (y-3)^2 = 2.$$

Ví dụ 6: *Cho đường tròn* (C): $x^2 + (y-1)^2 = 4$. *Tìm phương trình của đường tròn* (C_1) *là ảnh của đường tròn* (C) *qua phép quay tâm* O *góc quay* 90^0.

✍ *Giải*

Đường tròn (C) có tâm I(0; 1) và bán kính R = 2.

Gọi $I_1 = Q_O^{90^0}(I)$, ta có ngay $I_1(-1; 0)$.

Khi đó, phương trình đường tròn (C_1) được xác định bởi:

$$(C_1): \begin{cases} \text{Tâm } I_1(-1;0) \cdot \\ \text{Bán kính } R = 2 \end{cases} \Leftrightarrow (C_1): (x+1)^2 + y^2 = 4.$$

☞ ***Nhận xét***: Cho hàm số y = f(x). Để chứng minh đồ thị hàm số nhận điểm I(a; b) làm tâm đối xứng, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Với phép biến đổi toạ độ

$$\begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases}$$

Hàm số có dạng:

$$Y + b = f(X + a) \Leftrightarrow Y = F(X) \qquad (1)$$

Bước 2: Nhận xét rằng hàm số (1) là hàm số lẻ.

Bước 3: Vậy, đồ thị hàm số nhận điểm I(a; b) làm tâm đối xứng.

Ví dụ 7: *Cho hàm số* $y = x^3 - 6x^2 + 2$. *Chứng minh rằng đồ thị hàm số nhận điểm* I(2; −14) *làm tâm đối xứng.*

✍ *Giải*

Với phép biến đổi toạ độ

$$\begin{cases} X = x - 2 \\ Y = y + 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + 2 \\ y = Y - 14 \end{cases}$$

khi đó hàm số có dạng:

$$Y - 14 = (X+2)^3 - 6(X+2)^2 + 2 \Leftrightarrow Y = X^3 - 12X. \qquad (1)$$

Hàm số (1) là hàm số lẻ.

Vậy, đồ thị hàm số nhận điểm I(2; −14) làm tâm đối xứng.

☞ *Chú ý*: Đồ thị hàm số bậc ba:

$$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \text{ với } a \neq 0$$

luôn nhận điểm $U\left(-\frac{b}{3a}; f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$ làm tâm đối xứng.

Ví dụ 8: *Cho hàm số* $y = \frac{2x}{x-1}$. *Chứng minh rằng đồ thị hàm số nhận điểm* $I(1; 2)$ *làm tâm đối xứng.*

✍ *Giải*

Với phép biến đổi toạ độ

$$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + 2 \end{cases}$$

khi đó hàm số có dạng:

$$Y + 2 = \frac{2(X+1)}{(X+1)-1} \Leftrightarrow Y = \frac{2(X+1)}{(X+1)-1} - 2 \Leftrightarrow Y = \frac{2}{X}. \quad (1)$$

Hàm số (1) là hàm số lẻ.

Vậy, đồ thị hàm số nhận điểm $I(1; 2)$ làm tâm đối xứng.

☞ *Chú ý*: Đồ thị hàm số:

$$y = f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \text{ với } c \neq 0, D = ad - bc \neq 0$$

luôn nhận điểm $I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ làm tâm đối xứng.

Thật vậy, với công thức dời trục là:

$$\begin{cases} x = X - \frac{d}{c} \\ y = Y + \frac{a}{c} \end{cases}.$$

Thay x, y vào hàm số ta được:

$$Y + \frac{a}{c} = \frac{a\left(X - \frac{d}{c}\right) + b}{c\left(X - \frac{d}{c}\right) + d} \Leftrightarrow Y = \frac{acX - ad + bc}{c^2X} - \frac{a}{c} = Y = \frac{-ad + bc}{c^2X}$$

Hàm số này là hàm lẻ nên đồ thị nhận I làm tâm đối xứng.

Ví dụ 9: *Cho hàm số* $y = \frac{x^2}{x-1}$. *Chứng minh rằng đồ thị hàm số nhận điểm* $I(1; 2)$ *làm tâm đối xứng.*

✍ *Giải*

Với phép biến đổi toạ độ

$$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + 2 \end{cases}$$

khi đó hàm số có dạng:

$$Y + 2 = \frac{(X+1)^2}{(X+1)-1} \Leftrightarrow Y = \frac{X^2 + 2X + 1}{X} - 2 \Leftrightarrow Y = \frac{X^2 + 1}{X}. \qquad (1)$$

Hàm số (1) là hàm số lẻ

Vậy, đồ thị hàm số nhận điểm I(1; 2) làm tâm đối xứng.

☞ ***Chú ý***:

1. Đồ thị hàm phân thức:

$$y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}, \text{ với } d \neq 0$$

luôn nhận điểm $I\left(-\frac{e}{d}; \frac{b}{d} - \frac{2ac}{d^2}\right)$ làm tâm đối xứng.

2. Cho hàm số y = f(x). Để tìm điều kiện của tham số để đồ thị hm số nhận điểm I(a; b) làm tâm đối xứng, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Thực hiện phép biến đổi toạ độ

$$\begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases}$$

hàm số có dạng:

$$Y + b = f(X + a) \Leftrightarrow Y = F(X) \qquad (1)$$

Bước 2: Đồ thị hàm số nhận I(a; b) làm tâm đối xứng

$\Leftrightarrow$ hàm số (1) là hàm số lẻ $\Rightarrow$ Giá trị của *than số* .

Bước 3: Kết luận.

Ví dụ 10: *Cho hàm số* $y = \frac{x^2 - mx + m - 1}{x - 2}$. *Tìm* m *để đồ thị hm số nhận điểm* I(2; 3) *làm tâm đối xứng.*

✍ *Giải*

Điểm I(2; 3) là tâm đối xứng của đồ thị khi với phép biến đổi toạ độ:

$$\begin{cases} X = x - 2 \\ Y = y - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + 2 \\ y = Y + 3 \end{cases}$$

hàm số sau là hàm lẻ:

$$Y + 3 = \frac{(X+2)^2 - m(X+2) + m - 1}{(X+2) - 2}.$$

Xét hàm số:

$$Y = \frac{(X+2)^2 - m(X+2) + m - 1}{(X+2) - 2} - 3 \Rightarrow Y = \frac{X^2 - (m+1)X - m + 3}{X}. \qquad (1)$$

Hàm số (1) là hàm lẻ khi và chỉ khi $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

Vậy với $m = -1$ đồ thị hàm số nhận I(2; 3) làm tâm đối xứng.

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài tập 1: Chứng minh rằng:

a. Hợp thành của một số chẵn các phép đối xứng trục có trục đối xứng đồng quy là một phép quay.

b. Hợp thành của một số lẻ các phép đối xứng trục có trục đối xứng đồng quy là một phép đối xứng trục.

Bài tập 2: Giả sử phép đối xứng tâm $Đ_O$ biến đường thẳng (d) thành đường thẳng (d'). Chứng minh:

a. Nếu (d) không đi qua tâm đối xứng O thì (d') song song với (d), O cách đều (d) và (d').

b. Hai đường thẳng (d) và d' trùng nhau khi và chỉ khi d đi qua O.

Bài tập 3: Cho tam giác đều ABC với $(AB, AC) = (BC, BA) = (CA, CB) = 60^0$. Gọi $Đ_{AB}$, $Đ_{C}$ và $Đ_{AC}$ là các phép đối xứng lần lượt qua các đường thẳng AB, BC, AC.

a. Hợp thành của $Đ_{BC}$ và $Đ_{AB}$ là phép gì ?

b. Hợp thành của $Đ_{AB}$ và $Đ_{AC}$ là phép gì ?

c. Gọi Q_A, Q_B là các phép quay góc 120^0 với tâm lần lượt tại A, B. Hợp thành của Q_A và Q_B là phép gì ?

Bài tập 4: Cho Đ là phép đối xứng trục có trục đối xứng là đường thẳng d và T là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ song song với d. Hợp thành của Đ và T gọi là ***phép đối xứng trượt***. Đường thẳng d gọi là ***trục*** của phép đối xứng trượt, vectơ $\vec{v}$ gọi là ***vectơ trượt***. Phép đối xứng trục là một trường hợp đặc biệt của phép đối xứng trượt khi vectơ trượt là vectơ–không.

a. Chứng minh rằng hợp thành của Đ và T cùng bằng hợp thành của T và Đ.

b. Chứng minh rằng nếu M' là ảnh của M qua phép đối xứng trượt thì trung điểm của đoạn MM' luôn nằm trên trục của phép đối xứng trượt đó.

c. Hợp thành của hai phép đối xứng trượt có trục song song là phép gì?

d. Chứng minh rằng hợp thành của một phép đối xứng trục và một phép tịnh tiến là một phép đối xứng trượt.

e. Chứng minh rằng hợp thành của một phép quay và một phép đối xứng trục là một phép đối xứng trượt.

f. Chứng minh rằng hợp thành của ba phép đối xứng trục là một phép đối xứng trượt.

Bài tập 5: Cho ΔABC có H là trực tâm; M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Gọi H_1, H_2, H_3 là điểm đối xứng của H qua M, N, P theo thứ tự đó. Chứng minh H_1, H_2, H_3 thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ΔABC.

Bài tập 6: Cho ΔABC có đường tròn (O) cắt các cạnh BC, CA, AB theo thứ tự tại A_1 và A_2; B_1 và B_2; C_1 và C_2. Chứng minh rằng: nếu đường thẳng vuông góc với các cạnh của tam giác tại A_1, B_1, C_1 đồng quy thì các đường thẳng vuông góc với các cạnh của tam giác tại A_2, B_2, C_2 đồng quy.

Bài tập 7: Cho ΔABC vuông tại A. Về phía ngoài tam giác ta dựng các hình vuông ABDE và ACFH. Gọi I là trung điểm của cạnh BCE.

a. Chứng minh rằng AE = CD.

b. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AE và CD. Chứng minh rằng ΔBIJ là một tam giác đều.

Bài tập 8: Cho ΔABC, dựng ở ngoài tam giác ấy hai hình vuông BCMN và ACPQ lần lượt có tâm là O và O'.

a. Chứng minh rằng khi cố định hai điểm A, B và cho điểm C thay đổi thì đường thẳng NQ luôn đi qua một điểm cố định.

b. Gọi I là trung điểm của AB. Chứng minh rằng IOO' là tam giác vuông cân.

Bài tập 9: Về phía ngoài tứ giác lồi ABCD dựng các hình vuông có cạnh lần lượt là AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng bốn tâm của bốn hình vuông đó lập thành một tứ giác có hai đường chéo bằng nhau và vuông góc với nhau.

Bài tập 10: Cho điểm A và điểm G không nằm trên đương thẳng (a). Với mỗi điểm A nằm trên (a) ta dựng tam giác đều ABC có tâm là G. Tìm quỹ tích hai điểm B, C khi A chạy trên (a).

Bài tập 11: Cho hai đường thẳng phân biệt (a), (b) và một điểm C không nằm trên chúng. Hãy xác định các điểm A, B lần lượt nằm trên (a), (b) sao cho ABC là tam giác đều.

Bài tập 12: Cho đường tròn (Θ) và tam giác ABC. Một điểm M thay đổi trên đường tròn (O). Gọi M_1 là điểm đối xứng với M qua A, M_2 là điểm đối xứng với M_1 qua B, M_3 là điểm đối xứng với M_2 qua C. Tìm quỹ tích điểm M_3.

Bài tập 13: Cho đường tròn (O, R), A là một điểm cố định không trùng với tâm O, BC là một dây cung của (O), BC di động nhưng số đo của cung BC luôn bằng 120^0. Gọi I là trung điểm của BC, vẽ tam giác đều AIJ. Tìm tập hợp điểm J.

Bài tập 14: Cho tam giác ABC; P và Q là hai điểm di động lần lượt ở trên cạnh AB và AC sao cho AP = CQ

a. Xác định tâm và góc của phép quay biến $\overrightarrow{AP}$ thành $\overrightarrow{CQ}$.

b. Chứng minh rằng đường tròn (APQ) qua một điểm cố định khác A.

Bài tập 15: Cho tam giác ABC và I là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác. Chứng minh rằng $\overrightarrow{IA}.\sin A + \overrightarrow{IB}.\sin B + \overrightarrow{IC}.\sin C = \vec{0}$

Bài tập 16: Qua điểm K lấy trong hình vuông ABCD và đường thẳng cắt các cạnh AB, CD lần lượt tại P, Q. Chứng minh rằng giao điểm thứ hai của đường tròn qua K, P, B với đường tròn qua K, Q, D nằm trên đường chéo BD.

Bài tập 17: Cho đoạn thẳng AC và một điểm B ở trong đoạn đó. Dựng về cùng một phía của đường thẳng AC hai tam giác đều ABE và CBF. Hai điểm M và N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AF và CE. Chứng minh rằng BMN là tam giác đều.

Bài tập 18: Cho hai đường tròn (O_1, R) và (O_2, R); M là điểm di động trên (O_1, R), N là điểm di động (O_2, R) sao cho $(\overrightarrow{O_1M}, \overrightarrow{O_2N})$ có số đo không đổi. Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn MN luôn qua một điểm cố định.

Bài tập 19: Cho tam giác ABC, dựng ở phía ngoài tam giác ấy các tam giác đều ABC_1, ACB_1, BCA_1. Chứng minh rằng:

a. $AA_1 = BB_1 = CC_1$

b. $AA_1 = BB_1 = CC_1$ đồng quy tại điểm O

c. Đối với ΔABC nhọn, điểm O nằm trong tam giác và $OA_1 = OB + OC$.

Bài tập 20: Cho ΔABC có $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^0$. Hãy dựng điểm M trên cạnh AB và điểm N trên cạnh AC sao cho BM = CN và BC = 2MN.

Bài tập 21: Dựng tam giác đều biết ba đỉnh nằm trên bốn cạnh của một hình bình hành cho trước.

Bài tập 22: Cho ΔABC có các góc đều nhọn. Hãy dựng một điểm M sao cho tổng khoảng cách MA + MB + mặt cầu là nhỏ nhất.

Bài tập 23: Xác định phương trình đường thẳng (d_1) đối xứng với đường thẳng (d) qua điểm I, biết:

a. (d): $3x - 2y + 1 = 0$ qua điểm I(1; 2).

b. (d): $x - y - 1 = 0$ qua điểm I(−2; 3).

Bài tập 24: Cho hình bình hành ABCD biết phương trình cạnh (AB): $2x - y = 0$, (AD): $4x - 3y = 0$ và tâm I(2; 2). Lập phương trình các cạnh BC và CD.

Bài tập 25: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$. Xác định phương trình đường tròn (C') đối xứng với đường tròn (C) qua điểm E(1; 2).

Bài tập 26: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$. Chứng minh rằng đồ thị hàm số nhận điểm I(1; −1) làm tâm đối xứng.

Bài tập 27: Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$. Chứng minh rằng đồ thị hàm số nhận điểm I(1; 1) làm tâm đối xứng.

Bài tập 28: Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2x - 2}{x - 2}$. Chứng minh rằng đồ thị hàm số nhận điểm I(2; 2) làm tâm đối xứng.

Bài tập 29: Cho hàm số $y = \dfrac{2x^2 + (m-4)x - 2m + 1}{x - 2}$. Tìm m để đồ thị hàm số nhận điểm I(2; 1) làm tâm đối xứng.

Bài tập 30: Xác định m để đồ thị hàm số (C): $y = -\dfrac{1}{m}x^3 + 3mx^2 - 2$ nhận điểm I(1; 0) làm tâm đối xứng.

CHỦ ĐỀ 5 HAI HÌNH BẰNG NHAU

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. ĐỊNH LÍ

Chúng ta đều đã biết rằng phép dời hình biến tam giác thành tam giác bằng nó. Bây giờ ta đặt vấn đề *"Cho hai tam giác bằng nhau thì có hay không một phép dời hình biến tam giác này thành tam giác kia ?"*

Định lí: *Nếu* ΔABC *và* $\Delta A'B'C'$ *là hai tam giác bằng nhau thì có phép dời hình biến* ΔABC *thành* $\Delta A'B'C'$.

Chứng minh

Gọi F là một phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho nếu $\overrightarrow{CM} = p\overrightarrow{CA} + q\overrightarrow{CB}$ $(p, q \in \mathbf{R})$ thì $\overrightarrow{C'M'} = p\overrightarrow{C'A'} + q\overrightarrow{C'B'}$. Ta đi chứng minh F là một phép dời hình cần tìm.

Thật vậy, với điểm N và F biến N thành N', tức là nếu $\overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{CA} + l\overrightarrow{CB}$ $(k, l \in \mathbf{R})$ thì $\overrightarrow{C'N'} = k\overrightarrow{C'A'} + l\overrightarrow{C'B'}$.

Khi đó, ta lần lượt có:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CM} = (k\overrightarrow{CA} + l\overrightarrow{CB}) - (p\overrightarrow{CA} + q\overrightarrow{CB})$$

$$= (k-p)\overrightarrow{CA} + (l-q)\overrightarrow{CB}$$

$$MN^2 = (\overrightarrow{MN})^2 = [(k-p)\overrightarrow{CA} + (l-q)\overrightarrow{CB}]^2$$

$$= (k-p)CA^2 + (l-q)^2CB^2 + 2(k-p)(l-q)\,\overrightarrow{CA}\,\overrightarrow{CB}. \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{C'N'} - \overrightarrow{C'M'} = (k\overrightarrow{C'A'} + l\overrightarrow{C'B'}) - (p\overrightarrow{C'A'} + q\overrightarrow{C'B'})$$

$$= (k-p)\overrightarrow{C'A'} + (l-q)\overrightarrow{C'B'}$$

$$(M'N')^2 = (\overrightarrow{M'N'})^2 = [(k-p)\overrightarrow{C'A'} + (l-q)\overrightarrow{C'B'}]^2$$

$$= (k-p)C'A'^2 + (l-q)^2C'B'^2 + 2(k-p)(l-q)\,\overrightarrow{C'A'}\,\overrightarrow{C'B'}. \qquad (2)$$

Với giả thiết $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (nên $CA = C'A'$, $CB = C'B'$ và $\overrightarrow{CA}\,\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{C'A'}\,\overrightarrow{C'B'}$) nên từ (1) và (2) suy ra:

$MN = M'N' \Leftrightarrow$ F là một phép dời hình.

Mặt khác, ta nhận thấy phép dời hình F biến A, B, C lần lượt thành A', B', C', tức là biến ΔABC thành $\Delta A'B'C'$.

☞ ***Nhận xét***: Từ kết quả của định lí trên ta có thể phát biểu: *"Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi có phép dời hình biến tam giác này thành tam giác kia"*.

2. THẾ NÀO LÀ HAI HÌNH BẰNG NHAU

Định nghĩa: *Hai hình gọi là bằng nhau nếu có phép dời hình biến hình này thành hình kia.*

Định lí: *Nếu hình* $(\mathbf{H}_1)$ *bằng hình* $(\mathbf{H}_2)$ *và hình* $(\mathbf{H}_2)$ *bằng hình* $(\mathbf{H}_3)$ *thì hình* $(\mathbf{H}_1)$ *bằng hình* $(\mathbf{H}_3)$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: (Bài 20/tr 23 – Sgk): *Chứng tỏ rằng hai hình chữ nhật cùng kích thước thì bằng nhau.*

✍ *Giải*

Giả sử hai hình chữ nhật ABCD và A'B'C'D' có AB = A'B' và BC = B'C'.

Gọi O, O' theo thứ tự là tâm của hai hình chữ nhật ABCD và A'B'C'D'.

Ta có:

$\Delta ABC = \Delta A'B'C' \Rightarrow$ tồn tại một phép dời hình f để $\Delta A'B'C' = f(\Delta ABC)$

$\Rightarrow A'O' = f(AO) \Rightarrow D' = f(D)$

Vậy, ta được:

A'B'C'D' = f(ABCD) $\Rightarrow$ hai hình chữ nhật ABCD và A'B'C'D' bằng nhau.

Ví dụ 2: (Bài 21/tr 23 – Sgk):

a. *Chứng minh rằng hai tứ giác có các cặp cạnh tương ứng bằng nhau và một cặp đường chéo tương ứng bằng nhau thì bằng nhau.*

b. *Chứng minh rằng hai tứ giác có các cặp cạnh tương ứng bằng nhau và một cặp góc tương ứng bằng nhau thì bằng nhau.*

c. *Hai tứ giác có các cặp cạnh tương ứng bằng nhau thì có bằng nhau hay không ?*

✍ *Giải*

a. Giả sử hai đường chéo của hai tứ giác lồi ABCD và A'B'C'D' cắt nhau theo thứ tự tại O và O'.

Giả sử AC = A'C', ta có:

$\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (c.c.c)

$\Rightarrow$ tồn tại một phép dời hình f để $\Delta A'B'C' = f(\Delta ABC)$

$\Rightarrow A'O' = f(AO) \Rightarrow D' = f(D)$

Vậy, ta được:

A'B'C'D' = f(ABCD) $\Rightarrow$ hai hình tứ giác lồi ABCD và A'B'C'D' bằng nhau.

b. Giả sử hai đường chéo của hai tứ giác lồi ABCD và A'B'C'D' cắt nhau theo thứ tự tại O và O'.

Giả sử $\hat{A} = \hat{A}'$, ta có:

$\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (c.g.c)

$\Rightarrow$ tồn tại một phép dời hình f để $\Delta A'B'C' = f(\Delta ABC)$

$\Rightarrow A'O' = f(AO) \Rightarrow D' = f(D)$

Vậy, ta được:

$A'B'C'D' = f(ABCD) \Rightarrow$ hai hình tứ giác lồi ABCD và A'B'C'D' bằng nhau.

c. Không thể, bởi hình thoi ABCD cạnh a không thể bằng hình vuông A'B'C'D' cạnh a.

Ví dụ 3: (Bài 23/tr 23 – Sgk): *Hình* H_1 *gồm ba đường tròn* $(O_1; r_1)$, $(O_2; r_2)$, $(O_3; r_3)$ *đôi một tiếp xúc ngoài với nhau. Hình* H_2 *gồm ba đường tròn* $(I_1; r_1)$, $(I_2; r_2)$, $(I_3; r_3)$ *đôi một tiếp xúc ngoài với nhau. Chứng tỏ rằng hai hình* H_1 *và* H_2 *bằng nhau.*

✍ *Giải*

Xét hai tam giác $O_1O_2O_3$ và $I_1I_2I_3$, ta có:

$O_1O_2 = r_1 + r_2 = I_1I_2$,

$O_2O_3 = r_2 + r_3 = I_2I_3$,

$O_3O_1 = r_3 + r_1 = I_3I_1$,

suy ra:

$\Delta O_1O_2O_3 = \Delta I_1I_2I_3$ (c.c.c)

$\Rightarrow$ tồn tại một phép dời hình f để $\Delta O_1O_2O_3 = f(\Delta I_1I_2I_3) \Rightarrow (\mathbf{H_1}) = f(\mathbf{H_2})$

Vậy, hai hình $\mathbf{H_1}$ và $\mathbf{H_2}$ bằng nhau.

Ví dụ 4: *Trong mặt phẳng toạ độ* Oxy, *cho hai parabol* (P) *và* (P') *lần lượt có phương trình* $y = ax^2$ *và* $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. *Chứng minh rằng hai parabol đó bằng nhau.*

✍ *Giải*

Viết lại phương trình parabol (P') dưới dạng:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + 2x.\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$\Leftrightarrow y + \frac{\Delta}{4a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Như vậy, tồn tại phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{v}\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ để (P') = T(P).

Vậy, hai parabol (P) và (P') bằng nhau.

Ví dụ 5: *Trong mặt phẳng toạ độ* Oxy, *gọi* (C) *và* (C') *lần lượt là đồ thị của các hàm số* $y = f(x) = x^3 + 3x + 1$ *và* $y = g(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 1$. *Chứng minh rằng hai hình* (C) *và* (C') *bằng nhau.*

Giải

Giả sử tồn tại vectơ $\vec{v}$ (a, b) để tịnh tiến đồ thị y = f(x) thành đồ thị y = g(x), khi đó:

$$g(x) = f(x + a) + b \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = [(x + a)^3 + 3(x + a) + 1] + b$$
$$= x^3 + 3ax^2 + 3(a^2 + 1)x + a^3 + 3a + 1 + b.$$

suy ra a = −1 và b = 2.

Như vậy, tồn tại phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{v}$ (−1; 2) để (C') = T(C).

Vậy, ta được (C) và (C') bằng nhau.

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài tập 1: Theo định nghĩa tổng quát về sự bằng nhau của hai hình, hãy chứng minh rằng:

a. Hai đoạn thẳng có độ dài bằng nhau thì bằng nhau.

b. Hai góc có cùng số đo thì bằng nhau.

c. Hai đường tròn có bán kính bằng nhau thì bằng nhau.

Bài tập 2: Cho hai tam giác ABC và A'B'C' với đường cao lần lượt là AH và A'H'. Trong mỗi trường hợp sau đây, hai tam giác đó có bằng nhau hay không ?

a. AH = A'H', AB = A'B', AC = A'C'.

b. AH = A'H', AB = A'B', AC = A'C', các góc A và A' đều là góc tù.

Bài tập 3: Cho hình thang ABCD vuông tại A và D, hình thang A'B'C'D' vuông tại A' và D'. Chứng tỏ rằng hai hình thang đó bằng nhau nếu AB = A'B', BC = B'C' và CD = C'D'.

Bài tập 4: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai parabol (P) và (P') lần lượt có phương trình $y = f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$ và $y = g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$. Chứng minh rằng hai parabol đó bằng nhau.

Bài tập 5: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, gọi (C) và (C') lần lượt là đồ thị của các hàm số $y = f(x) = x^3 + 3x + 1$ và $y = g(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 1$. Chứng minh rằng hai hình (C) và (C') bằng nhau.

Bài tập 6: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, gọi (C) và (C') lần lượt là đồ thị của các hàm số $y = f(x) = \frac{x^2}{x - 2}$ và $y = g(x) = \frac{x^2 + 17x + 70}{x + 6}$. Chứng minh rằng hai hình (C) và (C') bằng nhau.

Bài tập 7: Cho hai hình bình hành. Hãy vẽ một đường thẳng chia mỗi hình bình hành thành hai hình bằng nhau.



CHỦ ĐỀ 6 PHÉP VỊ TỰ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa: *Cho một điểm* O *cố định và một số* k *không đổi* $k \neq 0$. *Phép biến hình biến mỗi điểm* M *thành điểm* M' *sao cho* $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ *được gọi là phép vị tự tâm* O, *tỉ số* k.

Ký hiệu là V_O^k hoặc $V_{(O,k)}$.

2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA PHÉP VỊ TỰ

Định lí 1: *Nếu phép vị tự tỉ số* k *biến hai điểm* M *và* N *thành hai điểm* M' *và* N' *thì*:

$$\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN} \text{ và } M'N' = |k|MN.$$

Định lí 2: *Phép vị tự biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm thẳng hàng đó.*

Hệ quả: Phép vị tự vị tự tỉ số k:

- Biến đường thẳng thàng đường thẳng song song (hoặc trùng) với đường thẳng đó.
- Biến tia thành tia.
- Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng và độ dài được nhân lên với $|k|$.
- Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số đồng dạng là $|k|$.
- Biến góc thành góc bằng nó.

3. ẢNH CỦA ĐƯỜNG TRÒN QUA PHÉP VỊ TỰ

Định lí 3: *Phép vị tự tỉ số* k *biến đường tròn bán kính* R *thành đường tròn có bán kính* $|k|R$.

4. TÂM VỊ TỰ CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

Bài toán 1: Cho hai đường tròn $(I_1; R_1)$ và $(I_2; R_2)$ với $R_1 \neq R_2$. Có hai phép vị tự $V_{O_1}^k$ và $V_{O_2}^k$ biến $(I_1; R_1)$ thành $(I_2; R_2)$.

Hai tâm vị tự O_1, O_2 và tỉ số k được xác định như sau:

- $k = \pm\dfrac{R_1}{R_2}$ ($k > 0$ thì gọi là tâm vị tự ngoài, $k < 0$ thì gọi là tâm vị tự trong).
- O_1, O_2 ở trên đường thẳng I_1I_2 và $\dfrac{\overline{O_1I_2}}{\overline{O_1I_1}} = \dfrac{\overline{O_2I_2}}{\overline{O_2I_1}} = k$.

Bài toán 2: Với ΔABC có hai đỉnh B, C cố định còn đỉnh A chạy trên đường tròn (O; R) cố định không có điểm chung với đường thẳng BC.

Khi đó, quỹ tích trọng tâm G của ΔABC là đường tròn (O'; R') là ảnh của đường tròn (O; R) tâm I (I là trung điểm của BC) tỉ số $k = \frac{1}{3}$.

Bài toán 3: Với ΔABC có trọng tâm G, trực tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp O thì ta có $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$.

Như vậy, khi ba điểm G, H, O không trùng nhau thì chúng cùng nằm trên một đường thẳng, được gọi là *đường thẳng Ơ-le*.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: TÌM PHÉP VỊ TỰ BIẾN HÌNH (H_1) THÀNH (H_2)

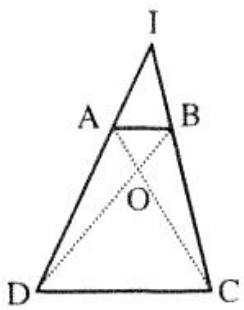
Phương pháp áp dụng

Sử dụng định nghĩa và tính chất của phép vị tự.

Ví dụ 1: (Bài 25/tr 29 – Sgk): *Ta nhận thấy*:

- Phép đối xứng tâm là phép vị tự.
- Phép đối xứng trục không là phép vị tự.
- Phép đồng nhất là phép vị tự.
- Phép tịnh tiến theo vectơ khác $\vec{0}$ không là phép vị tự.

Ví dụ 2: *Cho hình thang* ABCD *có các đáy* CD = 3AB. *Hãy xác định các phép vị tự biến* $\overrightarrow{AB}$ *thành* $\overrightarrow{DC}$; *biến* $\overrightarrow{AB}$ *thành* $\overrightarrow{CD}$.



✍ *Giải*

a. Gọi I là giao điểm của AD và BC, khi đó:

$V_I^3(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{DC}$.

b. Gọi O là giao điểm của AC và BD, khi đó:

$V_O^{-3}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{CD}$.

Ví dụ 3: (Bài 53/tr 14 – Sbt): *Cho hai tam giác* ABC *và* A'B'C' *không bằng nhau nhưng có các cạnh tương ứng song song*: AB//A'B', BC//B'C', CA//C'A'. *Chứng minh rằng có phép vị tự biến tam giác này thành tam giác kia.*

✍ *Giải – Bạn đọc tự vẽ hình*

Từ giả thiết AB và A'B' song song và không bằng nhau, suy ra hai đường thẳng AA' và BB' cắt nhau tại I.

Gọi V là phép vị tự tâm I tỉ số $k = \frac{OA'}{OA}$.

Khi đó $V(C) = C_1$ sao cho $AC // A'C_1$, $BC // B'C_1 \Rightarrow C_1 \equiv C'$.

Vậy, phép vị tự cần tìm chính là V.

Ví dụ 4: (Bài 27/tr 29 – Sgk): *Xác định tâm vị tự trong và tâm vị tự ngoài của hai đường tròn trong các trường hợp sau:*

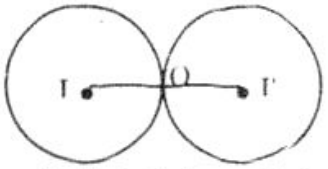
a. *Hai đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau.*

b. *Hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau.*

c. *Một đường tròn chứa đường tròn kia.*

✍ *Giải*

a. Hai đường tròn (I; R) và (I'; R') tiếp xúc ngoài với nhau, ta xét:



Trường hợp 1: Nếu R = R' thì $k = \pm 1$.

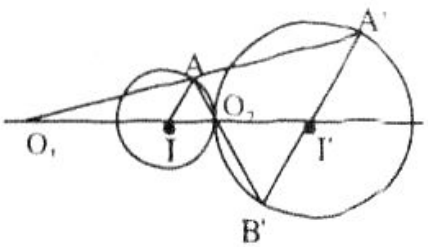
Khi đó, tâm vị tự O thoả mãn:

$\overrightarrow{OI'} = k\overrightarrow{OI} \Rightarrow$ k chỉ có thể bằng -1

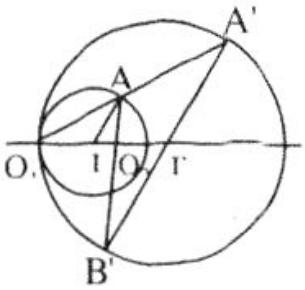
$\Rightarrow$ O (tâm vị tự trong) là trung điểm của II' (chính là tiếp điểm của hai đường tròn)

Trường hợp 2: Nếu $R \neq R'$ thì ta có thể xác định các phép vị tự sau:

- Lấy A'B' là một đường kính của đường tròn (I'; R') và IA là một bán kính của (I; R) sao cho hai vectơ $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{I'A'}$ cùng hướng.
- Đường thẳng II' cắt AA' và AB' lần lượt tại O_1 (tâm vị tự ngoài) và O_2 (tâm vị tự trong và O_2 trùng với tiếp điểm).



b. Hai đường tròn (I; R) và (I'; R') tiếp xúc trong với nhau ($R \neq R'$), ta có thể xác định các phép vị tự sau:

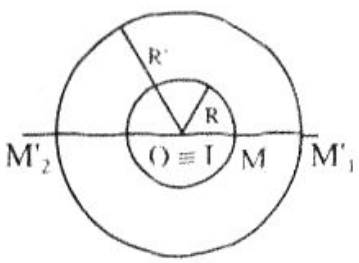


- Lấy A'B' là một đường kính của đường tròn (I'; R') và IA là một bán kính của (I; R) sao cho hai vectơ $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{I'A'}$ cùng hướng.
- Đường thẳng II' cắt AA' và AB' lần lượt tại O_1 (tâm vị tự ngoài) và O_2 (tâm vị tự trong).

c. Đường tròn (I; R) nằm trong đường tròn (I'; R'), ta xét:

Trường hợp 1: Nếu $I \equiv I'$ thì khi đó tâm vị tự O trùng với điểm I.

Vậy, ta có hai phép vị tự:



- Phép vị tự $V_1(I; k_1)$ với $k_1 = \dfrac{R'}{R}$ (biến điểm M thành điểm M'_1).
- Phép vị tự $V_2(I; k_2)$ với $k_2 = -\dfrac{R'}{R}$ (biến điểm M thành điểm M'_2).

Trường hợp 2: Nếu I không trùng với I' thì ta có thể xác định các phép vị tự sau:

- Lấy A'B' là một đường kính của đường tròn (I'; R') và IA là một bán kính của (I; R) sao cho hai vectơ $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{I'A'}$ cùng hướng.
- Đường thẳng II' cắt AA' và AB' lần lượt tại O_1 (tâm vị tự ngoài) và O_2 (tâm vị tự trong).

Vấn đề 2: GIẢI BÀI TOÁN ĐỊNH TÍNH

Phương pháp áp dụng

Ta thường gặp các dạng yêu cầu sau:

Dạng 1: Chứng minh $(\mathbf{H}_1)$ là ảnh của $(\mathbf{H}_2)$ qua phép vị tự V_O^k, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy điểm M_1 tuỳ ý thuộc $(\mathbf{H}_1)$, ta đi chứng minh $M_2 = V_O^k(M_1) \in (\mathbf{H}_2)$.

Bước 2: Ngược lại, lấy điểm M_2 tuỳ ý thuộc $(\mathbf{H}_2)$, ta đi chứng minh $M_1 = V_O^k(M_2) \in (\mathbf{H}_1)$.

Dạng 2: Chứng minh tính chất K, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định một hoặc nhiều phép vị tự để thiết lập mối liên kết giữa các yếu tố.

Bước 2: Sử dụng các tính chất của phép vị tự để giải các yêu cầu của bài toán.

Ví dụ 1: (Bài 26/tr 29 – Sgk): *Các khẳng định sau đây có đúng không ?*

a. *Phép vị tự luôn có điểm bất động (tức là điểm biến thành chính nó).*

b. *Phép vị tự không có thể có quá một điểm bất động.*

c. *Nếu phép vị tự có hai điểm bất động phân biết thì mọi điểm đều bất động.*

✍ *Giải*

a. Đúng, bởi đó chính là tâm vị tự.

b. Sai.

c. Đúng.

Ví dụ 2: (Bài 54/tr 14 – Sbt): *Cho hai phép vị tự V_1 có tâm O_1 tỉ số k_1 và V_2 có tâm O_2 tỉ số k_2. Gọi f là hợp thành của V_1 và V_2. Chứng minh rằng:*

a. *f là một phép tịnh tiến nếu $k_1k_2 = 1$. Hãy xác định vectơ tịnh tiến.*

b. *f là một phép vị tự nếu $k_1k_2 \neq 1$. Hãy xác định tâm và tỉ số của phép vị tự.*

✍ *Giải – Bạn đọc tự vẽ hình*

Với điểm M bất kỳ, giả sử $V_1(M) = M_1$ và $V_2(M_1) = M_2$, suy ra:

$$\begin{cases} \overrightarrow{O_1M_1} = k_1\overrightarrow{O_1M} \\ \overrightarrow{O_2M_2} = k_2\overrightarrow{O_2M_1} \end{cases} \text{ và } f(M) = M_2.$$

Gọi $I = V_2(O_1)$, tức là $\overrightarrow{O_2I} = k_2\overrightarrow{O_2O_1}$. Từ đó, suy ra:

$$\overrightarrow{IM_2} = k_2\overrightarrow{O_1M_1} = k_1k_2\overrightarrow{O_1M}.$$

a Với $k_1k_2 = 1$ thì:

$$\overrightarrow{IM_2} = \overrightarrow{O_1M} \Rightarrow \overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{O_1I} = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2I} = (1 - k_2)\overrightarrow{O_1O_2}.$$

Tức f là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (1 - k_2)\overrightarrow{O_1O_2}$.

b. Với $k_1k_2 \neq 1$ thì chọn điểm O_3 sao cho $\overrightarrow{O_3I} = k_1k_2\overrightarrow{O_3O_1}$, khi đó nhận thấy:

$$\overrightarrow{O_3M_2} = \overrightarrow{O_3I} + \overrightarrow{IM_2} = k_1k_2\overrightarrow{O_3O_1} + k_1k_2\overrightarrow{O_1M} = k_1k_2\overrightarrow{O_3M}.$$

Tức f là phép vị tự tâm O_3 tỉ số $k = k_1k_2$. Và tâm O_3 của phép vị tự này được xác định bởi đẳng thức:

$$\overrightarrow{O_3I} = k_1k_2\overrightarrow{O_3O_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{O_3O_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2I} = k_1k_2\overrightarrow{O_3O_1}$$

$$\Leftrightarrow (1 - k_1k_2)\overrightarrow{O_1O_3} = \overrightarrow{O_1O_2} + k_2\overrightarrow{O_2O_1} = (1 - k_2)\overrightarrow{O_1O_2}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{O_1O_3} = \frac{1 - k_2}{1 - k_1k_2}\overrightarrow{O_1O_2}. \qquad (*)$$

☞ ***Nhận xét***: Từ (*) chúng ta nhận thấy tâm của ba phép vị tự V_1, V_3 và f là ba điểm thẳng hàng. Và kết quả của ví dụ này sẽ được sử dụng trong một số bài toán khác.

Ví dụ 3: (Bài 60/tr 15 – Sbt): *Cho tam giác* ABC *vuông tại* A *và đường cao* AD. *Gọi* V *là phép vị tự tâm* D *tỉ số* $k = \frac{DA}{DB}$ *và* Q *là phép quay tâm* D *góc quay* $\alpha = (DB, DA)$, f *là hợp thành của* V *và* Q.

a. *Phép* f *biến* ΔABD *thành tam giác nào ?*

b. *Lấy hai điểm* M, N *lần lượt nằm trên hai cạnh* AB, AC *sao cho* $\frac{BM}{MA} = \frac{AN}{NC}$. *Chứng minh rằng* DMN *là tam giác vuông.*

✍ *Giải – Bạn đọc tự vẽ hình*

a. Nhận xét rằng:

$$k = \frac{DA}{DB} = \frac{DC}{DA}$$

nên f biến ΔABD thành ΔCAD.

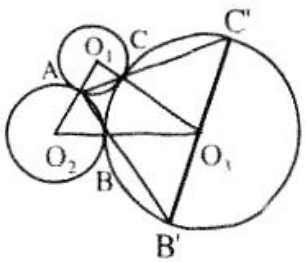
b. Nhận xét rằng:

- f(BA) = AC.
- M, N lần lượt chia BA, AC theo cùng một tỉ số.

Từ đó, suy ra:

$$f(M) = N \Rightarrow (DM, DN) = \alpha \Rightarrow \Delta DMN \text{ vuông tại D.}$$

Ví dụ 4: (Bài 58/tr 14 – Sbt): *Cho ba đường tròn* (O_1), (O_2), (O_3) *đôi một tiếp xúc ngoài với nhau,* A *là tiếp điểm của* (O_1) *và* (O_2), B *là tiếp điểm của* (O_2) *và* (O_3), C *là tiếp điểm của* (O_3) *và* (O_1). *Đường thẳng* AB *cắt* (O_3) *tại điểm thứ hai* B', *đường thẳng* AC *cắt* (O_3) *tại điểm thứ hai* C'. *Chứng minh rằng* B'C' *là đường kính của* (O_3).



✍ *Giải*

Từ giả thiết, ta có nhận xét:

- Vì B là tâm vị tự trong của (O_2) và (O_3) nên $O_2A \,//\, O_3B'$.
- Vì C là tâm vị tự trong của (O_1) và (O_3) nên $O_1A \,//\, O_3C'$.

Mặt khác, ta có ba điểm O_1, A, O_2 thẳng hàng nên C', O_3, B' thẳng hàng.

Vậy B'C' là đường kính của (O_3).

Ví dụ 5: (Bài 30/tr 29 – Sgk): *Cho hai đường tròn* (O) *và* (O') *có bán kính khác nhau, tiếp xúc ngoài với nhau tại* M. *Một đường tròn* (O") *thay đổi luôn tiếp xúc ngoài với* (O) *và* (O') *lần lượt tại* B *và* C. *Chứng minh rằng đường thẳng* BC *luôn đi qua một điểm cố định.*

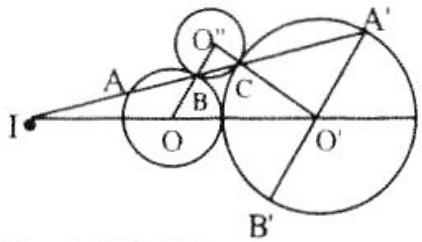
✍ *Giải*

Giả sử đường thẳng BC cắt (O), (O') và OO' theo thứ tự tại A, A' và I.

Vì C tâm tỉ cự trong của (O') và (O") nên:

$$\frac{CA'}{CB} = \frac{R'}{R''} = \frac{CO'}{CO''} \Rightarrow O'A' \,//\, BO''$$

$$\Leftrightarrow O'A' \,//\, OB \Rightarrow \frac{IB}{IA'} = \frac{OB}{O'A'} = \frac{R}{R'}$$



$\Rightarrow$ I là tâm tỉ cự ngoài của hai đường tròn (O; R) và (O'; R').

Vậy, đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định là tâm tỉ cự ngoài của hai đường tròn (O; R) và (O'; R').

☞ ***Chú ý***: Các em học sinh hãy thực hiện thêm bài toán:

Cho hai đường tròn (O), (O') *ngoài nhau và không bằng nhau. Một đường tròn* (O") *thay đổi luôn tiếp xúc ngoài với* (O) *và* (O') *lần lượt tại* A *và* B. *Chứng minh rằng đường thẳng* AB *luôn đi qua một điểm cố định. Nếu thay giả thiết "tiếp xúc ngoài" bằng "tiếp xúc trong" thì kết quả sẽ thay đổi như thế nào ?*

Ví dụ 6: (Bài 55/tr 14 – Sbt): *Cho ba đường tròn* (I_1, R_1), (I_2, R_2), (I_3, R_3) *không đồng tâm và không bằng nhau. Gọi* O_1^+ *và* O_1^- *lần lượt là tâm vị tự ngoài và tâm vị tự trong của hai đường tròn* (I_2, R_2), (I_3, R_3), O_2^+ *và* O_2^- *lần lượt là tâm vị tự ngoài và tâm vị tự trong của hai đường tròn* (I_3, R_3), (I_1, R_1), O_3^+ *và* O_3^- *lần lượt là tâm vị tự ngoài và tâm vị tự trong của hai đường tròn* (I_1, R_1), (I_2, R_2). *Chứng minh rằng mỗi bộ ba điểm sau đây thẳng hàng:*

O_1^+, O_2^+, O_3^+; O_1^+, O_2^-, O_3^-; O_1^-, O_2^+, O_3^-; O_1^-, O_2^-, O_3^+.

✍ *Giải*

a. Với bộ ba điểm O_1^+, O_2^+, O_3^+, ta có nhận xét:

- Phép vị tự tâm O_3^+ tỉ số $\frac{R_2}{R_1}$ biến đường tròn (I_1, R_1) thành đường tròn (I_2, R_2).

- Phép vị tự tâm O_1^+ tỉ số $\frac{R_3}{R_2}$ biến đường tròn (I_2, R_2) thành đường tròn (I_3, R_3).

Khi đó, hợp thành của hai phép vị tự trên là một phép vị tự V_1 biến đường tròn (I_1, R_1) thành đường tròn (I_3, R_3) và có tỉ số:

$$\frac{R_2}{R_1}.\frac{R_3}{R_2}=\frac{R_3}{R_1} \Rightarrow V_1 \text{ có tâm vị tự là } O_2^+.$$

Vậy, bộ ba điểm O_1^+, O_2^+, O_3^+ thẳng hàng.

b. Với các bộ ba điểm O_1^+, O_2^-, O_3^-; O_1^-, O_2^+, O_3^-; O_1^-, O_2^-, O_3^+ được chứng minh tương tự.

Vấn đề 3: GIẢI BÀI TOÁN ĐỊNH LƯỢNG

Phương pháp áp dụng

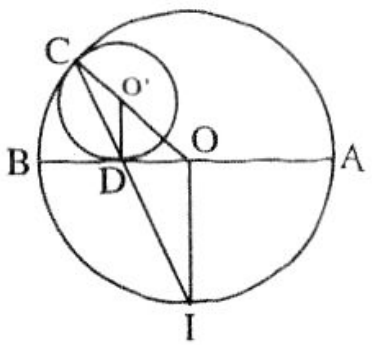
Bằng việc thiết lập được các phép vị tự thích hợp, ta có thể tính toán được các yếu tố trong một hình.

Ví dụ 1: *Cho đường tròn* (O; R) *đường kính* AB. *Một đường tròn* (O') *tiếp xúc với* (O) *và đoạn* AB *lần lượt tại* C, D, *cắt đường thẳng* CD *tại* I. *Tính độ dài các đoạn thẳng* AI *và* BI.

Giải

Ta có:

- C là tâm vị tự dương của hai đường tròn (O) và (O').
- D∈(O'), I∈(O) và ba điểm C, D, I thẳng hàng.



Do đó thực hiện phép vị tự tâm C, tỉ số $\frac{R'}{R}$ (với R' là bán kính của (O')), ta có:

$$H_C^{\frac{R'}{R}} : O \mapsto O', I \mapsto D \Rightarrow OI // O'D \Rightarrow OI \perp AB$$

$\Rightarrow$ I là trung điểm của cung AB $\Rightarrow$ AI = BI.

Khi đó:

$$AI = BI = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{2R}{\sqrt{2}} = R\sqrt{2}.$$

Vấn đề 4: TÌM TẬP HỢP ĐIỂM M

Phương pháp áp dụng

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm một phép vị tự V_O^k, biến điểm E di động thành điểm M.

Bước 2: Tìm tập hợp (H) của các điểm E.

Bước 3: Kết luận tập hợp các điểm M là ảnh của (H) trong phép vị tự V_O^k.

Ví dụ 1: *Cho đường tròn* (O, R) *và một điểm* A *cố định ở trên đường tròn,* C *là một dây cung di động của đường tròn này và* BC *có độ dài không đổi bằng* 2d (d < R). *Tìm tập hợp trọng tâm* G *của* ΔABC.

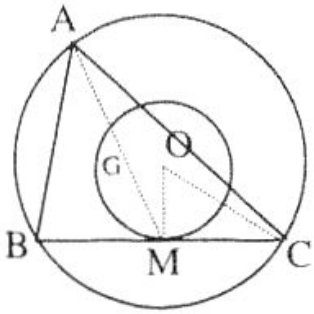
Giải

Gọi M là trung điểm cạnh BC thì OM⊥BC

Trong ΔOMC ta có:

$OM^2 = OC^2 - MC^2 = R^2 - d^2$

$\Rightarrow OM = \sqrt{R^2 - d^2}$.



Vậy tập hợp điểm M là đường tròn (γ) tâm O bán kính $\sqrt{R^2 - d^2}$.

Vì $\frac{\overline{AG}}{\overline{AM}} = \frac{2}{3}$ nên $V_A^{2/3}(M) = G$

Suy ra tập hợp các điểm G là đường tròn (C') với (C') = $V_A^{2/3}[(\gamma)]$.

Ví dụ 2: (Bài 57/tr 14 – Sbt): *Cho hai đường tròn* (O) và (O') *cắt nhau tại* A *và* B. *Một đường thẳng thay đổi đi qua* A *cắt* (O) *tại* A *và* M, *cắt* (O') *tại* A *và* M'. *Gọi* P, P' *lần lượt là trung điểm của* AM, A'M'.

a. *Tìm quỹ tích trung điểm* I *của đoạn* PP'.

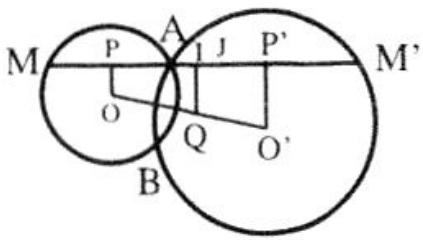
b. *Tìm quỹ tích trung điểm* J *của đoạn* MM'.

Giải

a. Gọi Q là trung điểm OO', suy ra:

IQ là đường trung bình của hình thang OPP'O'

$\Rightarrow QI \perp PP' \Rightarrow \widehat{AIQ} = 90^0$.



Vậy, quỹ tích trung điểm I của đoạn PP' thuộc đường tròn (C') đường kính AQ.

b. Từ giả thiết J là trung điểm của MM', suy ra:

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AM'}\right) = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AP'} = 2\overrightarrow{AI}.$$

Vậy, quỹ tích trung điểm J của đoạn MM' thuộc đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) qua phép vị tự tâm A tỉ số bằng 2.

Vấn đề 5: DỰNG HÌNH

Phương pháp áp dụng

Ta thường thực hiện theo 4 bước đã biết.

Ví dụ 1: (Bài 62/tr 15 – Sbt): *Dựng* ΔABC *biết góc* $\hat{A} = \alpha$, *tỉ số* $\frac{AB}{AC} = k$ *và chu vi tam giác bằng* m.

✍ *Giải*

Trước tiên, chúng ta đi dựng $\Delta AB'C'$ sao cho $\hat{A} = \alpha$ và $\frac{AB'}{AC'} = k$.

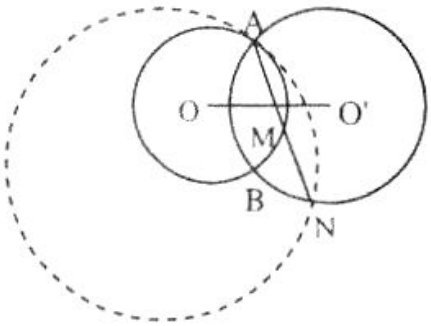
Đặt $AB' + B'C' + C'A = m'$.

Khi đó, phép vị tự tâm A tỉ số $\frac{m}{m'}$ sẽ biến $\Delta AB'C'$ thành ΔABC.

Ví dụ 2: (Bài 28/tr 29 – Sgk): *Cho hai đường tròn* (O) *và* (O') *cắt nhau tại* A *và* B. *Hãy dựng qua* A *một đường thẳng* d *cắt* (O) *ở* M *và cắt* (O') *ở* N *sao cho* M *là trung điểm của* AN.

✍ *Giải*

Phân tích: Giả sử đã dựng được đường thẳng d cắt (O) ở M và cắt (O') ở N sao cho M là trung điểm của AN, gọi $k = \frac{AN}{AM} = 2$. Thực hiện phép vị tự V tâm A, tỉ số $k = 2$ thì $N = V(M)$.



Cách dựng: Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng $(O'') = V(O)$, khi đó $(O'') \cap (O') = \{N\}$.
- Nối AN cắt (O) tại M.

AN là đường thẳng d phải dựng

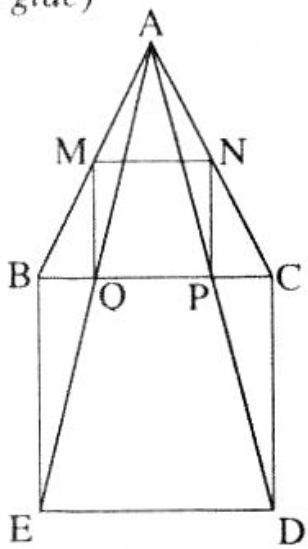
Chứng minh: Ta có ngay M, N theo thứ tự thuộc đường tròn (O) và (O'), ngoài ra:

$N = V(M) \Rightarrow \overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AM}$

$\Rightarrow$ M là trung điểm của AN.

Biện luận: Vì (O'') cắt (O') tại duy nhất một điểm N nên bài toán chỉ có một nghiệm hình.

Ví dụ 3: *Dựng hình vuông nội tiếp trong một tam giác cho trước (hình vuông nội itếp tam giác là hình vuông có hai đỉnh ở trên một cạnh, hai đỉnh còn lại ở trên hai cạnh còn lại của tam giác)*



✍ *Giải*

Phân tích: Giả sử đã dựng được hình vuông MNPQ nội tiếp trong tam giác ABC cho trước. Gọi $k = \frac{MN}{BC}$. Thực hiện phép vị tự tâm A, tỉ số k thì hình vuông MNPQ sẽ biến thành hình vuông BCDE. Suy ra A, P, D thẳng hàng và A, Q, E thẳng hàng.

Cách dựng: Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng hình vuông BCDE sao cho BCDE và ABC nằm ở hai bên của đường thẳng BC.
- AD cắt cạnh BC tại P; AE cắt cạnh BC tại Q
- Dựng đường thẳng qua P, song song với BC cắt cạnh AC tại N
- Dựng đường thẳng qua N, song song với BC cắt cạnh AB tại M

Thì MNPQ là hình vuông phải dựng

Chứng minh: Theo cách dựng ta có tứ giác MNPQ nội tiếp trong tam giác ABC.

Áp dụng định lý Talet, ta có:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AE}} = k$$

do đó $V_A^k : MNPQ \mapsto BCDE$

mà BCDE là hình vuông nên MNPQ là hình vuông

Biện luận: Ta luôn chỉ có một hình vuông BCDE ở khác phía của tam giác ABC đối với đường thẳng BC nên luôn có chỉ một điểm P và chỉ một điểm Q ở trên cạnh BC.

Vậy bài toán có một và chỉ một nghiệm hình.

Vấn đề 6: HỆ TOẠ ĐỘ ĐỐI VỚI PHÉP VỊ TỰ

Ví dụ 1: *Trong mặt phẳng toạ độ* Oxy, *tìm tọa độ ảnh của điểm* M(0; 2) *qua*:

a. *Phép vị tự* V *tâm* O *tỉ số* k = 2.

b. *Phép biến hình f là hợp thành của phép tịnh tiến* T *theo vectơ* $\vec{v}(2; -1)$ *và* V.

Giải

a. Giả sử $V_O^2(M) = M'(x'; y')$, ta có:

$$\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2.0 = 0 \\ y' = 2.2 = 4 \end{cases} \Rightarrow M_1(0; 4).$$

b. Ta lần lượt:

- Giả sử $T_{\vec{v}}(M) = M_1(x_1; y_1)$, ta có:

$$\overrightarrow{MM_1} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y - 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow M_1(2; 1).$$

- Giả sử $V_O^2(M_1) = M_2(x_2; y_2)$, ta có:

$$\overrightarrow{OM_2} = 2\overrightarrow{OM_1} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2.2 = 4 \\ y_2 = 2.1 = 2 \end{cases} \Rightarrow M_2(4; 2).$$

Ví dụ 2: *Trong mặt phẳng toạ độ* Oxy, *tìm tọa độ ảnh của điểm* M(0; 2) *qua phép vị tự*:

a. *Phép vị tự* V *tâm* I(2; −1) *tỉ số* k = 2.

b. *Phép biến hình f là hợp thành của phép đối xứng tâm* I *và* V.

Giải

a. Giả sử $V_I^2(M) = M'(x'; y')$, ta có:

$$\overrightarrow{IM'} = 2\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - 2 = 2(0 - 2) \\ y' + 1 = 2(2 + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -2 \\ y' = 5 \end{cases} \Rightarrow M'(-2; 5).$$

b. Ta lần lượt:

- Giả sử $Đ_1(M) = M_1$, ta có $M_1(4; -4)$.
- Giả sử $V_I^2(M_1) = M_2(x_2; y_2)$, ta có:

$$\overrightarrow{IM_2} = 2\overrightarrow{IM_1} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 - 2 = 2(4-2) = 4 \\ y_2 + 1 = 2(-4+1) = -6 \end{cases} \Rightarrow M_2(4; -6).$$

Ví dụ 3: *Trong mặt phẳng toạ độ* Oxy, *tìm phương trình của đường thẳng* (d_1) *là ảnh của đường thẳng* (d): $x + 2y - 4 = 0$ *qua phép vị tự* O *tỉ số* $k = \frac{1}{2}$.

Giải

Ta có hai cách trình bày sau:

Cách 1: Lấy điểm $A(4; 0) \in (d)$ và $V_O^{1/2}(A) = A_1(2; 0)$.

Khi đó, phương trình đường thẳng (d_1) được xác định bởi:

$$(d_1): \begin{cases} \text{qua } A_1(2;0) \\ (d_1)//(d) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \begin{cases} \text{qua } A_1(2;0) \\ (d_1): x + 2y + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): x + 2y - 2 = 0.$$

Cách 2: Lấy hai điểm $A(4; 0)$ và $B(0; 2)$ thuộc (d) và gọi:

$$V_O^{\frac{1}{2}}(A) = A_1(2; 0); \qquad V_O^{\frac{1}{2}}(B) = B_1(0; 1).$$

Khi đó, phương trình đường thẳng (d_1) được xác định bởi:

$$(d_1): \begin{cases} \text{qua } A_1(2;0) \\ \text{qua } B_1(0;1) \end{cases} \Leftrightarrow (d_1): \frac{x}{2} + \frac{y}{1} = 1 \Leftrightarrow (d_1): x + 2y - 2 = 0.$$

Ví dụ 4: *Cho đường tròn* (C): $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 16$. *Tìm phương trình của đường tròn* (C_1) *là ảnh của đường tròn* (C) *qua phép vị tự tâm* E(1; 2) *tỉ số* $k = 2$.

Giải

Đường tròn (C) có tâm $I(-2; 4)$ và bán kính $R = 4$.

Gọi $V_E^2(I) = I_1(x_1; y_1)$, ta có:

$$\overrightarrow{EI_1} = 2\overrightarrow{EI} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 1 = 2(-2-1) \\ y_1 - 2 = 2(4-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \\ y_1 = 6 \end{cases} \Rightarrow I_1(-5; 6).$$

Khi đó, phương trình đường tròn (C_1) được xác định bởi:

$$(C_1): \begin{cases} \text{Tâm } I_1(-5; 6) \\ \text{Bán kính } R_1 = 2R = 8 \end{cases} \Leftrightarrow (C_1): (x + 5)^2 + (y - 6)^2 = 64.$$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài tập 1: Cho ΔABC có trọng tâm G và O là tâm đường tròn ngoại tiếp.

a. Hãy vẽ ảnh của ΔABC qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = 2$.

b. Hãy vẽ ảnh của ΔABC qua phép vị tự tâm G tỉ số $k = \frac{1}{2}$.

Bài tập 2:

a. Những đường thẳng nào biến thành chính nó qua phép vị tự tỉ số $k \neq 1$.

b. Những đường tròn nào biến thành chính nó qua phép vị tự tỉ số $k \neq 1$.

Bài tập 3: Gọi F là phép biến hình có tính chất sau: Với mọi cặp điểm M, N và ảnh M', N' của chúng, ta luôn có $\overline{M'N'} = k\overline{MN}$, trong đó k là một số không đổi khác 0. Hãy chứng minh rằng F là phép tịnh tiến hoặc phép vị tự.

Bài tập 4:

a. Cho ΔABC và hình vuông MNPQ như hình vẽ. Gọi V là phép vị tự tâm A tỉ số $k = \frac{AB}{AM}$. Hãy dựng ảnh của hình vuông MNPQ qua phép vị tự V.

b. Từ bài toán trên, hãy suy nghĩ cách giải bài toán sau: Cho ΔABC nhọn, hãy dựng hình vuông MNPQ sao cho hai đỉnh P, Q nằm trên cạnh BC và hai đỉnh M, N lần lượt nằm trên hai cạnh AB và AC.

Bài tập 5: Cho điểm A và đường thẳng (d) cố định. M là điểm di động trên d, tìm tập hợp trung điểm của đoạn AM.

Bài tập 6: Cho phép vị tự V tâm O tỉ số $k \neq 1$ và phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{v} \neq \vec{0}$. Gọi f là hợp thành của V và T.

a. Tìm điểm I sao cho f biến I thành chính nó.

b. Chứng minh rằng f là phép vị tự tâm I tỉ số k.

Bài tập 7: Cho tam giác ABC vuông tại A và đường cao AD. Gọi c là đường phân giác của góc C, $Đ_c$ là phép đối xứng qua c, V là phép vị tự tâm C tỉ số $k = \frac{CA}{CB}$ và f là hợp thành của $Đ_c$ và V.

a. Phép f biến ΔABC thành tam giác nào ?

b. Lấy hai điểm M, N lần lượt nằm trên hai cạnh AB, AD sao cho $\frac{AM}{MB} = \frac{DN}{NA}$. Chứng minh rằng c là phân giác của góc $\widehat{MCN}$.

Bài tập 8: Cho đường tròn (O) với dây cung phép quay. Dựng hình vuông ABCD có hai đỉnh A, B nằm trên đường thẳng phép quay và hai đỉnh C, D nằm trên đường tròn.

Bài tập 9: Cho điểm A cố định nằm trên đường tròn (O) và điểm C thay đổi trên đường tròn đó. Dựng hình vuông ABCD. Tìm quỹ tích điểm B và D.

Bài tập 10: Trên đường tròn (C) tâm O bán kính R, cho hai điểm cố định A, B và một điểm M di động. Tìm tập hợp trọng tâm G của tam giác ABM.

Bài tập 11: Cho đường tròn (O; R) và điểm I cố định khác O. Một điểm M thay đổi trên đường tròn. Tia phân giác của góc MOI cắt IM tại N. Tìm quỹ tích điểm N.

Bài tập 12: Cho đường tròn (O) có đường kính AB. Gọi C là điểm đối xứng với A qua B và PQ là đường kính thay đổi của (O) khác đường kính AB. Đường thẳng CQ cắt PA và PB lần lượt tại M và N.

a. Chứng minh rằng Q là trung điểm của CM, N là trung điểm của CQ.

b. Tìm quỹ tích các điểm M và N khi đường kính PQ thay đổi.

Bài tập 13: Cho đường tròn (O; R) và điểm A cố định. Một dây cung BC thay đổi của (O; R) có độ dài không đổi NC = m. Tìm quỹ tích điểm G sao cho $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Bài tập 14: Cho đường tròn (O) và điểm P nằm trong đường tròn đó. Một đường thẳng thay đổi đi qua P, cắt (O) tại hai điểm A, B. Tìm quỹ tích điểm M sao cho $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}$.

Bài tập 15: Cho ΔABC nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi G và H tương ứng là trọng tâm và trực tâm của tâm giác, các điểm A', B', C' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB.

a. Tìm phép vị tự F biến A, B, C tương ứng thành A', B', C'.

b. Chứng minh rằng O, G, H thẳng hàng.

c. Tìm ảnh của O qua phép vị tự F.

d. Gọi A'', B'', C'' lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AH, BH, CH; A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là giao điểm thứ hai của các tia AH, BH, CH với đường tròn (O); A_1', B_1', C_1' tương ứng là chân các đường cao đi qua A, B, C. Tìm ảnh của A, B, C, A_1, B_1, C_1 qua phép vị tự tâm H tỉ số $\frac{1}{2}$.

e. Chứng minh chín điểm A', B', C', A'', B'', C'', A_1', B_1', C_1' cùng thuộc một đường tròn (đường tròn này gọi là đường tròn Ơ-le của tam giác ABC).

Bài tập 16: Cho đường tròn (O) và một điểm P cố định. Một cát tuyến di động qua P cắt (O) tại M và N. Gọi I là trung điểm của MN. Tìm tập hợp các trung điểm của IP.

Bài tập 17: Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc nhau tại A. Đường kính vẽ từ A gặp (O) tại B và (O') tại C. Một đường thẳng di động qua A gặp (O) tại M và (O') tại N. Tìm tập giao điểm I của BN và CM.

Bài tập 18: Cho tứ giác ABCD có A, B, C cố định và D là điểm di động sao cho AD = l (l > 0).

a. Tìm tập hợp trung điểm I của đường chéo BD.

b. Tìm tập hợp các trung điểm M của đoạn nối trung điểm hai đường chéo AC và BD.

Bài tập 19: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, tìm phương trình của đường thẳng (d_1) là ảnh của đường thẳng (d): 3x + 2y – 6 = 0 qua phép vị tự O tỉ số $k = -\frac{1}{2}$.

Bài tập 20: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn (C): $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$. Tìm phương trình của đường tròn (C_1) là ảnh của đường tròn (C) qua phép vị tự tâm E(1; 1) tỉ số k = 2.

CHỦ ĐỀ 7 PHÉP ĐỒNG DẠNG

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. ĐỊNH NGHĨA PHÉP ĐỒNG DẠNG

Định nghĩa: *Phép biến hình* F *gọi là phép đồng dạng tỉ số* k (k > 0) *nếu với hai điểm* M *và* N *bất kì và ảnh* M' *và* N' *của chúng ta luôn có* M'N' = kMN.

2. ĐỊNH LÍ

Định lí: *Mọi phép đồng dạng* F *tỉ số* k (k > 0) *đều là hợp thành của một phép vị tự* V *tỉ số* k *và một phép dời hình* D.

Hệ quả: *Phép đồng dạng tỉ số* k:

- *Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm thẳng hàng đó.*
- *Biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia.*
- *Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng và độ dài được nhân lên với* k.
- *Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số* k.
- *Biến đường tròn có bán kính* R *thành đường tròn có bán kính* kR.
- *Biến góc thành góc bằng nó.*

3. HAI HÌNH ĐỒNG DẠNG

Định nghĩa: *Hai hình gọi là đồng dạng với nhau nếu có phép đồng dạng biến hình này thành hình kia.*

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: TÌM PHÉP ĐỒNG DẠNG BIẾN HÌNH (H_1) THÀNH (H_2)

Phương pháp áp dụng

Ta thường thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tìm một phép dời hình D biến hình (H_1) thành (H_1').

Bước 2: Tìm một phép vị tự V biến hình (H_1') thành (H_2).

Bước 3: Kết luận: tồn tại phép đồng dạng F là hợp thành của phép vị tự V và phép dời hình D.

Ví dụ 1: (Bài 32/tr 31 – Sgk): *Chứng tỏ rằng các đa giác đều có cùng số cạnh thì đồng dạng với nhau.*

✍ *Giải*

Gọi P_1 và P_2 là hai đa giác đều có cùng số cạnh, ta thực hiện:

- Phép quay biến P_1 thành P_1' có cạnh song song với cạnh của P_2.
- Khi đó, sẽ tồn tại một phép vị tự biến P_1' thành P_2.

Từ đó, theo định lí trên thì tồn tại một phép đồng dạng biến P_1 thành P_2 nên P_1 đồng dạng với P_2.

Ví dụ 2: (Bài 59/tr 15 – Sbt): *Chứng minh rằng nếu hai tam giác có các cạnh tương ứng tỉ lệ thì có phép đồng dạng biến tam giác này thành tam giác kia.*

✍ *Giải*

Với hai tam giác ABC và A'B'C' có:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = k .$$

Chọn điểm O và xét phép vị tự V tâm O tỉ số k, khi đó V biến ΔABC thành $\Delta A_1B_1C_1$ và ta được:

$$\Delta A_1B_1C_1 = \Delta A'B'C'$$

suy ra, tồn tại phép dời hình $f(\Delta A_1B_1C_1) = \Delta A'B'C'$.

Vậy, hợp thành củaV và f là một phép đồng dạng biến ΔABC thành $\Delta A'B'C'$.

☞ ***Chú ý***: Chúng ta sẽ sử dụng kết quả trong ví dụ trên cho một số bài toán.

Vấn đề 2: CHỨNG MINH TÍNH CHẤT HÌNH HỌC

Phương pháp áp dụng

1. Với bài toán định tính, ta thường gặp các dạng yêu cầu sau:

Dạng 1: Chứng minh $(\mathbf{H_1})$ là ảnh của $(\mathbf{H_2})$ qua phép đồng dạng D, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy điểm M_1 tuỳ ý thuộc $(\mathbf{H_1})$, ta đi chứng minh:

$$M_2 = D(M_1) \in (\mathbf{H_2}).$$

Bước 2: Ngược lại, lấy điểm M_2 tuỳ ý thuộc $(\mathbf{H_2})$, ta đi chứng minh:

$$M_1 = D(M_2) \in (\mathbf{H_1}).$$

Dạng 2: Chứng minh tính chất K, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định một phép đồng dạng để thiết lập mối liên kết giữa các yếu tố.

Bước 2: Sử dụng các tính chất của phép đồng dạng để giải các yêu cầu của bài toán.

2. Với bài toán định lượng, bằng việc thiết lập được phép đồng dạng thích hợp, ta có thể tính toán được các yếu tố trong một hình.

Ví dụ 1: (Bài 31/tr 31 – Sgk): *Chứng tỏ rằng nếu phép đồng dạng* F *biến* ΔABC *thành* $\Delta A'B'C'$ *thì trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp* ΔABC *lần lượt biến thành trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp* $\Delta A'B'C'$.

Giải

a. Gọi M là trung điểm của đoạn BC và G là trọng tâm ΔABC. Giả sử:

$F(M) = M'$ và $F(G) = G'$.

Từ hệ quả, ta suy ra:

M' là trung điểm của $B'C' \Rightarrow A'M'$ là trung tuyến. (1)

$$\frac{A'G'}{A'M'} = \frac{2}{3}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra G' là trọng tâm $\Delta A'B'C'$.

b. Gọi AA_1, BB_1 là hai đường cao của ΔABC và H là trực tâm ΔABC. Giả sử:

$F(B_1) = B_1'$, $F(A_1) = A_1'$ và $F(H) = H'$.

- Từ tính chất của phép đồng dạng, ta suy ra:

$$H' = A_1A_1' \cap B_1B_1'. \quad (3)$$

- Từ tính chất bảo toàn độ lớn góc của phép đồng dạng, ta suy ra:

A_1A_1', B_1B_1' là các đường cao của $\Delta A'B'C'$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra H' là trực tâm $\Delta A'B'C'$.

c. Ta lần lượt xét:

- Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Giả sử $F(O) = O'$.

Từ tính chất tỉ lệ về độ dài giữa hai hai đoạn thẳng, ta suy ra:

$O'A' = O'B' = O'C'$ bởi $OA = OB = OC$.

Vậy, điểm O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta A'B'C'$.

Ví dụ 3: (Bài 63/tr 15 – Sbt): *Chứng minh rằng nếu hai tam giác có các đường cao tương ứng bằng nhau thì bằng nhau.*

Giải

Giả sử:

- ΔABC có các đường cao AH, BI, CK.
- $\Delta A'B'C'$ có các đường cao A'H', B'I', C'K'.

Từ giả thiết ta được:

$AH = A'H'$, $BI = B'I'$, $CK = C'K'$.

Vì là các đường cao nên:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AH.BC = \frac{1}{2}BI.AC = \frac{1}{2}CK.AB \Leftrightarrow AH.BC = BI.AC = CK.AB$$

tương tự ta cũng có $A'H'.B'C' = B'I'.A'C' = C'K'.A'B'$.

Từ đó, suy ra:

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'A'}{CA}=k \Rightarrow \text{Hai } \Delta ABC, \Delta A'B'C' \text{ đồng dạng tỉ số } k$$

Do đó, có phép đồng dạng f tỉ số k biến ΔABC thành $\Delta A'B'C'$ và nhận thấy:

$$\begin{cases} f(AH)=A'H' \\ AH=A'H' \end{cases} \Rightarrow k=1 \Rightarrow f \text{ là phép dời hình} \Rightarrow \Delta ABC=\Delta A'B'C'$$

Vấn đề 3: DỰNG HÌNH

Phương pháp áp dụng

Ta thường thực hiện theo 4 bước đã biết.

Ví dụ 1: (Bài 33/tr 32 – Sgk): *Dựng* ΔABC *nếu biết hai góc* $\hat{B}=\beta$, $\hat{C}=\gamma$ *và một trong các yếu tố sau:*

a. *Đường cao* AH = h.

b. *Đường trung tuyến* AM = m.

c. *Bán kính* R *của đường tròn ngoại tiếp.*

Giải

Dựng $\Delta A_0B_0C_0$ có $\hat{B}_0=\beta$, $\hat{C}_0=\gamma$.

a. Giả sử $\Delta A_0B_0C_0$ có đường cao $A_0H_0=h_0$, khi đó thực hiện phép đồng dạng F_1 tỉ số $k_1=\frac{h}{h_0}$ ta sẽ được:

$$F_1(\Delta A_0B_0C_0)=\Delta ABC.$$

b. Giả sử $\Delta A_0B_0C_0$ có đường trung tuyến $A_0M_0=m_0$, khi đó thực hiện phép đồng dạng F_2 tỉ số $k_2=\frac{m}{m_0}$ ta sẽ được:

$$F_2(\Delta A_0B_0C_0)=\Delta ABC.$$

c. Giả sử $\Delta A_0B_0C_0$ có bán kính đường tròn ngoại tiếp R_0, khi đó thực hiện phép đồng dạng F_3 tỉ số $k_3=\frac{R}{R_0}$ ta sẽ được:

$$F_3(\Delta A_0B_0C_0)=\Delta ABC.$$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài tập 1:

a. Phép dời hình có phải là phép đồng dạng hay không ? Nếu có thì tỉ số số đồng dạng là bao nhiêu ?

b. Phép vị tự có phải là phép đồng dạng hay không ? Nếu có thì tỉ số số đồng dạng là bao nhiêu ?

c. Có phải mọi phép đồng dạng đều biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.

Bài tập 2: Chứng minh rằng hai hình vuông bất kì đồng dạng với nhau.

Bài tập 3:

a. Chứng minh rằng với hai đoạn thẳng bất kì AB và A'B' luôn có phép đồng dạng biến A thành A' và biến B thành B'.

b. Chứng minh rằng hai đường cônic có cùng tâm sai e thì đồng dạng với nhau.

Bài tập 4: Cho ΔABC vuông tại A, AC = 2AB. Gọi Q là phép quay tâm A, góc quay $\varphi = (AB, AC)$, V là phép vị tự tâm A tỉ số 2, còn F là phép hợp thành của V và Q.

a. Tìm ảnh của các điểm A, B, C qua phép F.

b. Phép F biến đường tròn tâm B bán kính BA thành đường tròn nào?

c. Chứng minh rằng với mỗi điểm M nằm trên đường tròn tâm B bán kính BA (M khác A), có một điểm N nằm trên đường tròn tâm C bán kính CA sao cho ΔAMN đồng dạng với ΔABC.

d. Chứng tỏ rằng F cũng là phép hợp thành của Q và V.

Bài tập 5: Cho hai đường tròn (I; R) và (I'; 2R) tiếp xúc ngoài với nhau tại O, (d) là đường thẳng tiếp xúc với hai đường tròn tại O. Gọi V là phép vị tự tâm O tỉ số 2, Đ là phép đối xứng qua đường thẳng (d), F là phép hợp thành của V và Đ.

a. F biến điểm O và I thành những điểm nào?

b. F biến đường tròn (I; R) thành hình nào?

c. Với điểm M không nằm trên (d) và M' = F(M). Chứng minh rằng nếu E là giao điểm của MM' và (d) thì EM' = 2EM.

d. Chứng tỏ rằng F cũng là phép hợp thành của Đ và V.

Bài tập 6: Dựng ΔABC nếu biết hai góc $\hat{B} = 30^0$, $\hat{C} = 120^0$ và một trong các yếu tố sau:

a. Đường cao AH = 2cm.

b. Đường trung tuyến AM = 6cm.

c. Bán kính của đường tròn ngoại tiếp bằng 4cm.

Bài tập 7: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho các điểm A(1; 1), B(0; 3), C(2; 4). Xác định ảnh của ΔABC qua các phép biến hình sau:

a. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (2; 1)$.

b. Phép đối xứng qua trục Ox.

c. Phép đối xứng qua tâm I(2; 1).

d. Phép quay tâm O góc 90^0.

e. Phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua trục Oy và phép vị tự tâm O tỉ số k = –2.

Bài tập 8: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng (d): x + 2y – 3 = 0. Xác định ảnh của (d) qua các phép biến hình sau:

a. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (-1; 3)$.

b. Phép đối xứng qua trục Oy.

c. Phép đối xứng qua tâm I(3; –1).

d. Phép quay tâm O góc -90^0.

e. Phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua trục Ox và phép vị tự tâm O tỉ số k = 2.

CHƯƠNG II

ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN QUAN HỆ SONG SONG

CHỦ ĐỀ 1 ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. MỞ ĐẦU VỀ HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Môn *hình học không gian* là môn học nghiên cứu các tính chất của các hình nằm trong không gian.

Hình học không gian có các đối tượng cơ bản là *điểm*, *đường thẳng* và *mặt phẳng*.

Quan hệ thuộc: Trong không gian:

a. Với một điểm A và một đường thẳng (d) có thể xảy ra hai trường hợp:
 - Điểm A *thuộc* đường thẳng (d), kí hiệu $A \in (d)$.
 - Điểm A *không thuộc* đường thẳng (d), kí hiệu $A \notin (d)$.

b. Với một điểm A và một mặt phẳng (P) có thể xảy ra hai trường hợp:
 - Điểm A *thuộc* mặt phẳng (P), kí hiệu $A \in (P)$.
 - Điểm A *không thuộc* mặt phẳng (P), kí hiệu $A \notin (P)$.

Hình biểu diễn của một hình trong không gian: Để vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian, người ta đưa ra những quy tắc, chẳng hạn như:

- *Đường thẳng được biểu diễn bởi đường thẳng. Đoạn thẳng được biểu diễn bởi đoạn thẳng.*
- *Hai đường thẳng song song (hoặc cắt nhau) được biểu diễn bởi hai đường thẳng song song (hoặc cắt nhau).*
- *Điểm* A *thuộc đường thẳng* (a) *được biểu diễn bởi một điểm* A' thuộc *đường thẳng* (a'), *trong đó* (a') *biểu diễn cho đường thẳng* (a).
- *Dùng nét vẽ liền để biểu diễn cho những đường trông thấy và dùng nét đứt đoạn để biểu diễn cho những đường bị khuất.*

2. CÁC TÍNH CHẤT THỪA NHẬN CỦA HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Tính chất thừa nhận 1: *Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước.*

Tính chất thừa nhận 2: *Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.*

Tính chất thừa nhận 3: *Tồn tại bốn điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng.*

Tính chất thừa nhận 4: *Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó.*

Đường thẳng đó được gọi là ***giao tuyến của hai mặt phẳng*** đó.

Tính chất thừa nhận 5: *Trong mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết của hình học phẳng đều đúng.*

Định lí: *Nếu một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt của một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.*

3. ĐIỀU KIỆN XÁC ĐỊNH MẶT PHẲNG

Có bốn cách xác định một mặt phẳng:

Cách 1: Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng của mặt phẳng, kí hiệu (ABC).

Cách 2: Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua một đường thẳng (d) và một điểm A không thuộc (d), kí hiệu (A, d).

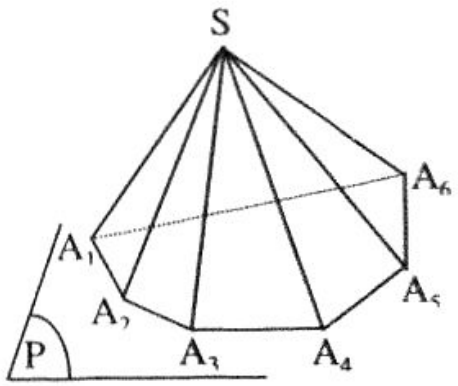
Cách 3: Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua hai đường thẳng cắt nhau (a), (b), kí hiệu (a, b).

Cách 4: Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua hai đường thẳng song song (a), (b), kí hiệu (a, b).

4. HÌNH CHÓP VÀ HÌNH TỨ DIỆN

Định nghĩa: *Cho đa giác $A_1A_2...A_n$ và cho điểm S nằm ngoài mặt phẳng chứa đa giác đó. Nối S với các đỉnh A_1, A_2, ..., A_n ta được n miền tam giác* SA_1A_2, SA_2A_3, ..., $SA_{n-1}A_n$.

Hình gồm n tam giác đó và đa giác $A_1A_2...A_n$ được gọi là ***hình chóp*** $S.A_1A_2...A_n$.



Trong đó:

- Điểm S gọi là *đỉnh* của hình chóp.
- Đa giác $A_1A_2...A_n$ gọi là *mặt đáy* của hình chóp.
- Các đoạn thẳng A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ gọi là các *cạnh đáy* của hình chóp.
- Các đoạn thẳng SA_1, SA_2, ..., SA_n gọi là các *cạnh bên* của hình chóp.
- Các miền tam giác SA_1A_2, SA_2A_3, ..., $SA_{n-1}A_n$ gọi là các *mặt bên* của hình chóp.

Nếu đáy của hình chóp là một miền tam giác, tứ giác, ngũ giác, .. thì hình chóp tương ứng gọi là hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác, hình chóp ngũ giác, ...

☞ ***Chú ý:***

1. Hình chóp tam giác còn gọi là *hình tứ diện*.
2. Hình tứ diện có bốn mặt là những tam giác đều được gọi là *hình tứ diện đều*.

Định nghĩa: *Thiết diện của hình $\mathcal{H}$ khi cắt bởi mặt phẳng* (P) *là phần chung của mặt phẳng* (P) *và hình* $\mathcal{H}$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: SỬ DỤNG CÁC TÍNH CHẤT THỪA NHẬN ĐỂ XÉT VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐIỂM, ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Phương pháp áp dụng

1. Để biết khi nào một điểm thuộc một mặt phẳng, ta có các kết quả sau:
 - Giả sử (P) là mặt phẳng xác định bởi ba điểm A, B, C thì khi đó A, B, C đều thuộc (P).
 - Nếu đường thẳng (a) nằm trong mặt phẳng (P), thì khi đó điểm M thuộc (a) đều thuộc (P).
2. Để chứng minh đường thẳng (a) nằm trong mặt phẳng (P) ta đi chứng minh tồn tại hai điểm phân biệt A, B thuộc (a) và thuộc (P).
 - Nếu mặt phẳng (P) cố định thì ta khẳng định được thêm rằng "*Đường thẳng* (a) *nằm trong một mặt phẳng cố định* (P)".
 - Nếu hai điểm A, B cố định thì ta khẳng định được thêm rằng "*Mặt phẳng* (P) *chứa một đường thẳng cố định* (a)".

Ví dụ 1: (Bài 4/tr 50 – Sgk): *Cho hai mặt phẳng* (P) *và* (Q) *cắt nhau theo giao tuyến* Δ. *Trên* (P) *cho đường thẳng* (a) *và trên* (Q) *cho đường thẳng* (b). *Chứng minh rằng nếu* (a) *và* (b) *cắt nhau thì hai giao điểm phải nằm trên* Δ.

✍ *Giải*

Giả sử:

$$(a) \cap (b) = \{M\} \Rightarrow \begin{cases} M \in (a) \subset (P) \\ M \in (b) \subset (Q) \end{cases} \Rightarrow M \in (P) \cap (Q) = \Delta \Rightarrow M \in \Delta.$$

☞ ***Chú ý***: Trong một vài trường hợp đặc thù chúng ta còn sử dụng phương pháp chứng minh phản chứng để thực hiện.

Ví dụ 2: (Bài 1/tr 51 – Sbt): *Chứng minh rằng một mặt phẳng và một đường thẳng không nằm trên mặt phẳng đó có không quá một điểm chung.*

✍ *Giải*

Với mặt phẳng (P) và đường thẳng (a) theo như giả thiết.

Nếu (a) có hai điểm chung với (P) thì (a) sẽ nằm trong (P) – Mâu thuẫn.

Ví dụ 3: (Bài 9/tr 50 – Sgk): *Chứng minh rằng nếu ba đường thẳng phân biệt cắt nhau từng đôi một thì chúng đồng quy hoặc cùng nằm trong một mặt phẳng.*

✍ *Giải*

Với ba đường thẳng phân biệt (a), (b), (c). Giả sử:

$(a) \cap (b) = \{A\}, (b) \cap (c) = \{B\}, (c) \cap (a) = \{C\}$.

Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Ba điểm A, B, C là ba điểm phân biệt. Do (a), (b), (c) phân biệt nên A, B, C là ba điểm không thẳng hàng. Vậy chúng xác định một mặt phẳng (ABC).

Ta có:

- Đường thẳng (a) có hai điểm A, C thuộc (ABC), nên $(a) \in (ABC)$.
- Tương tự $(b) \in (ABC)$ và $(c) \in (ABC)$.

Vậy, ba đường thẳng (a), (b), (c) cùng thuộc một mặt phẳng (ABC).

Trường hợp 2: Hai trong ba điểm A, B, C trùng nhau, giả sử $A \equiv B$.

Nếu $A \neq C$ thì $(a) \equiv (c)$, mâu thuẫn.

Do đó, ta phải có:

$A \equiv C \Leftrightarrow A \equiv B \equiv C \Leftrightarrow$ (a), (b), (c) đồng quy.

Vậy, ba đường thẳng (a), (b), (c) đồng quy.

☞ ***Chú ý***: Kết quả của ví dụ trên gợi ý một phương pháp chứng minh ba đường thẳng đồng quy.

Ví dụ 4: (Bài 2/tr 51 – Sbt): *Cho mặt phẳng* (P) *và ba điểm* A, B, C *nằm ngoài mặt phẳng* (P). *Giả sử các đoạn thẳng* AB *và* BC *đều cắt mặt phẳng* (P). *Chứng minh rằng đoạn thẳng* AC *không cắt mặt phẳng* (P).

✍ *Giải*

Ta lần lượt có nhận xét :

- Vì đoạn thẳng AB cắt mặt phẳng (P) nên A, B phải ở về hai phía của (P).
- Vì đoạn thẳng BC cắt mặt phẳng (P) nên B, C phải ở về hai phía của (P).

Suy ra A, C ở về cùng một phía của (P), tức đoạn thẳng AC không cắt mặt phẳng (P).

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, qua ví dụ trên các em học sinh có thể tổng kết rằng:

- Để chứng minh ***đoạn thẳng*** AB không cắt mặt phẳng (P) chúng ta đi chứng minh hai điểm A, B ở về cùng một phía với (P).
- Để chứng minh ***đoạn thẳng*** AB cắt mặt phẳng (P) chúng ta đi chứng minh hai điểm A, B ở về hai phía với (P).

Ví dụ 5: *Trong mặt phẳng* (α), *cho góc* $x\hat{O}y$. A *là điểm ngoài* (α). M, N *là hai điểm di động lần lượt trên* Ox, Oy.

1. *Giả sử* OM = ON. *Chứng minh rằng trung tuyến* AP *của* ΔAMN *luôn nằm trong một mặt phẳng cố định.*

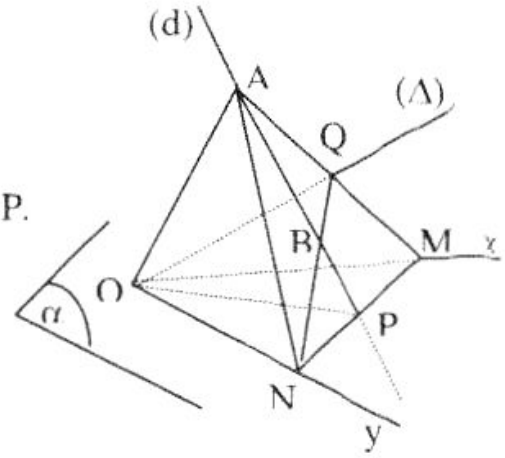
2. *Gọi* (d) *là đường thẳng cố định qua* A *và cắt* (α) *tại một điểm không thuộc* Ox, Oy. MN *di động nhưng luôn cắt* (d).
 a. *Chứng minh rằng* MN *luôn đi qua một điểm cố định.*
 b. *Gọi* B *là điểm cố định trên* (d), B ≠ A *và không thuộc* (α). AM *và* BN *cắt nhau tại* Q. *Chứng minh rằng* Q *thuộc đồng thời hai mặt phẳng cố định. Suy ra* Q *thuộc một đường thẳng cố định.*

✍ *Giải*

1. Ta có:

 OM = ON ⇒ P thuộc Oz là tia phân giác của góc xÔy – cố định.

 Vậy, trung tuyến AP nằm trong mặt phẳng cố định (A, Oz).



2. Giả sử (d) ∩ (α) = {P} – cố định.

a. Ta có ngay:

 (d) ∩ MN = {P} cố định.

 Vậy, đường thẳng MN luôn đi qua điểm cố định P.

b. Ta có:

 - Q ∈ BN ⊂ (B, Oy) – cố định
 ⇒ Q ∈ (B, Oy) – cố định.
 - Q ∈ AM ⊂ (A, Ox) – cố định
 ⇒ Q ∈ (A, Ox) – cố định.

Vậy, điểm Q thuộc đường thẳng cố định Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng cố định (A, Ox) và (B, Oy).

Ví dụ 6: *(Bài 3, 4/tr 51 – Sbt):*

a. *Cho n điểm (n ≥ 4) trong đó không có bốn điểm nào đồng phẳng. Chứng minh rằng không có ba điểm nào trong chúng thẳng hàng.*

b. *Cho n điểm (n ≥ 4) trong đó bất kì bốn điểm nào cũng đồng phẳng. Chứng minh rằng n điểm đó đồng phẳng.*

✍ *Giải*

Với n điểm A_1, A_2, A_3, A_4, ...A_n.

a. Giả sử trái lại có ba điểm A_1, A_2, A_3 thẳng hàng, suy ra có bốn điểm A_1, A_2, A_3, A_4 đồng phẳng – mâu thuẫn.

b. Nếu các điểm A_1, A_2, A_3, A_4, ...A_n thẳng hàng thì rõ ràng chúng đồng phẳng.

Nếu các điểm A_1, A_2, A_3, A_4, ...A_n không thẳng hàng thì tồn tại ba điểm không thẳng hàng (giả sử là A_1, A_2, A_3), ta được mặt phẳng $(A_1A_2A_3)$.

Vì bốn điểm bất kì của n điểm đã cho đều đồng phẳng, tức:

(A_1, A_2, A_3, A_i), i ≥ 4 đồng phẳng ⇒ $A_i \in (A_1A_2A_3)$, i ≥ 4.

Tức n điểm đã cho đồng phẳng.

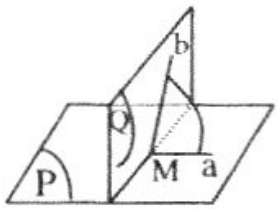
Vấn đề 2: TÌM GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT PHẲNG

Phương pháp áp dụng

Để tìm giao tuyến của hai mặt phẳng, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tìm hai điểm chung của hai mặt phẳng, cụ thể để tìm điểm chung M của hai mặt phẳng (P) và (Q) ta thường thực hiện:

- Tìm trong (P) đường thẳng (a) đi qua M.
- Tìm trong (Q) đường thẳng (b) đi qua M.



Khi đó M chính là điểm chung của hai mặt phẳng (P) và (Q).

Bước 2: Đường thẳng qua 2 điểm chung đó là giao tuyến.

Ví dụ 1: *Cho hình chóp* S.ABCD, *đáy* ABCD *có hai cạnh* AB *và* CD *cắt nhau. Gọi* C' *là một điểm nằm giữa* S *và* C. *Hãy tìm giao tuyến của mặt phẳng* (ABC') *với các mặt phẳng* (ABCD), (SAB), (SBC), (SCD), (SAD).

Giải

Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

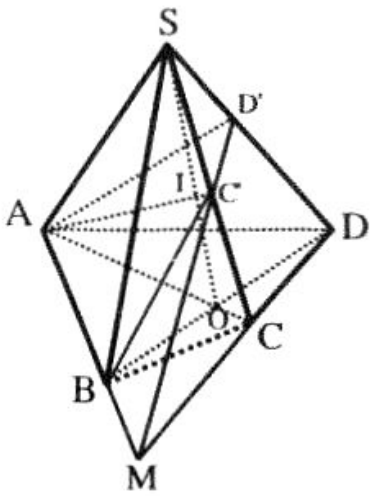
Cách 1: Từ giả thiết, giả sử AB cắt CD tại M.

Nối MC' cắt SD tại D', khi đó ta nhận được:

$(ABC') \cap (ABCD) = AB$,

$(ABC') \cap (SAB) = AB$, $(ABC') \cap (SBC) = BC'$,

$(ABC') \cap (SCD) = C'D'$, $(ABC') \cap (SAD) = AD'$.



Cách 2: Giả sử AC cắt BD tại O.

Trong mặt phẳng (SAC), ta có $AC' \cap SO = \{I\}$.

Nối BI cắt SD tại D', khi đó ta nhận được:

$(ABC') \cap (ABCD) = AB$,

$(ABC') \cap (SAB) = AB$, $(ABC') \cap (SBC) = BC'$,

$(ABC') \cap (SCD) = C'D'$, $(ABC') \cap (SAD) = AD'$.

☞ ***Nhận xét***: Tứ giác ABC'D' các cạnh nằm trên những giao tuyến của mặt phẳng (ABC') với các mặt của hình chóp S.ABCD. Tứ giác đó được gọi là ***thiết diện*** (hay ***mặt cắt***) của hình chóp S.ABCD cắt bởi mặt phẳng (ABC').

Ví dụ 2: (Bài 10/tr 50 – Sgk): *Cho hai đường thẳng* (a) *và* (b) *cắt nhau tại* O *và đường thẳng* (c) *cắt* mp(a, b) *ở điểm* I *khác* O. *Gọi* M *là điểm di động trên* (c) *khác* I. *Chứng minh rằng giao tuyến của các mặt phẳng* (M, a), (M, b) *nằm trên một mặt phẳng cố định.*

Giải

Ta có ngay:

$(M, a) \cap (M, b) = MO \in (O, c)$ – cố định.

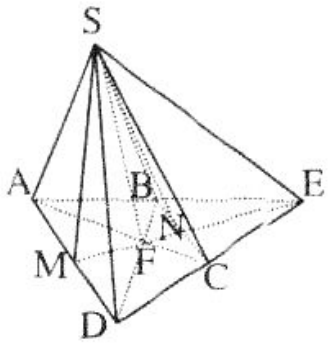
Ví dụ 3: *Trong mặt phẳng* (α), *cho tứ giác* ABCD *có* AB *cắt* CD *tại* E, AC *cắt* BD *tại* F, S *là một điểm không thuộc* (α).

a. *Tìm giao tuyến của* (SAB) *và* (SCD).

b. *Tìm giao tuyến của* (SAC) *và* (SBD).

c. *Tìm giao tuyến của* (SEF) *với các mặt phẳng* (SAD) *và* (SBC).

Giải



a. Ta có ngay S là điểm chung của (SAB) và (SCD).
Mặt khác:
$E \in AB \subset (SAB) \Rightarrow E \in (SAB)$.
$E \in CD \subset (SCD) \Rightarrow E \in (SCD)$.
Vậy, ta được $SE = (SAB) \cap (SCD)$.

b. Tương tự câu a), ta được $SF = (SAC) \cap (SBD)$.

c. Giả sử EF cắt AD và BC theo thứ tự tại M, N. Khi đó:
- (SEF) và (SAD) có hai điểm chung là S và M nên có giao tuyến là SM.
- (SEF) và (SBC) có hai điểm chung là S và N nên có giao tuyến là SN.

☞ ***Chú ý:*** Trong câu c) chúng ta đã sử dụng ý tưởng trong phần chú ý của bài toán 2 để thực hiện tìm điểm chung thứ hai, cụ thể:
- Trong mặt phẳng (SEF) ta chọn đường thẳng EF.
- Trong mặt phẳng (SBC) ta chọn đường thẳng BC.
- Ta có EF và BC cùng nằm trong mặt phẳng (ABCD) và EF cắt BC tại điểm N.
- Do đó N là điểm chung của hai mặt phẳng (SEF) và (SBC).

Đối với ví dụ trên, điều này rất trực quan và thấy ngay được. Tuy nhiên, một vài bài toán các em học sinh cần hiểu được bản chất của vấn đề mới có được lựa chọn thích hợp.

Vấn đề 3: TÌM GIAO ĐIỂM CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Phương pháp áp dụng

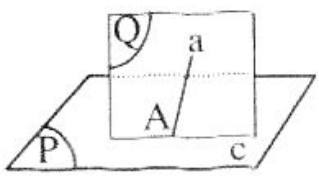
Cho đường thẳng (a) và mặt phẳng (P), giả sử (a) cắt (P). Để tìm giao điểm A của (a) và (P), ta lựa chọn một trong hai hướng sau:

Hướng 1: Nếu trong mặt phẳng (P) có sẵn một đường thẳng (c) cắt (a) tại điểm A nào đó thì A chính là giao điểm của (a) và (P).

Hướng 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chọn mặt phẳng phụ (Q) chứa (a) sao cho giao tuyến (c) của (P) và (Q) dễ xác định.

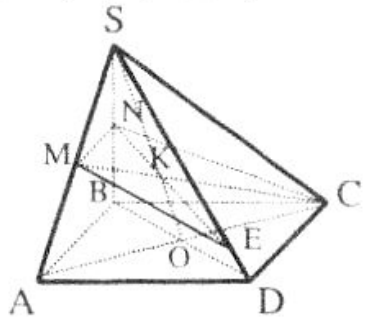
Bước 2: Trong (Q), đường thẳng (c) cắt (a) tại điểm A nào đó thì A là giao điểm của (a) và (P).



Ví dụ 1: (Bài 11/tr 50 – Sgk): *Cho hình bình hành* ABCD *nằm trong mặt phẳng* (P) *và điểm* S *nằm ngoài mặt phẳng* (P). *Gọi* M *là điểm nằm giữa* S *và* A; N *là điểm nằm giữa* S *và* B; *giao điểm của hai đường thẳng* AC *và* BD *là* O.

a. *Tìm giao điểm của đường thẳng* SO *và mặt phẳng* (CMN).

b. *Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng* (SAD) *và* (CMN).



Giải

a. Trong mặt phẳng (SAC), ta có:

$K = SO \cap CM \in (CMN) \Rightarrow SO \cap (CMN) = K.$

b. Trong mặt phẳng (SBD), kéo dài NK cắt SD tại E.

Vậy, ta được $(SAD) \cap (CMN) = ME$.

Nhận xét: Như vậy, trong ví dụ trên:

a. Với câu a) chúng ta đã sử dụng hướng 1 để xác định giao điểm của đường thẳng với mặt phẳng.

b. Việc sử dụng kết quả ở câu a) giúp chúng ta nhanh chóng thực hiện được câu b). Điều này cho thấy câu a) được đề xuất với gợi ý để thực hiện câu b).

Các em học sinh cần làm quen dần với việc gặp các bài toán không có câu gợi ý, và khi đó để xác định được giao tuyến của hai mặt phẳng các em cần linh hoạt sử dụng kiến thức trong việc xác định giao điểm của đường thẳng với mặt phẳng.

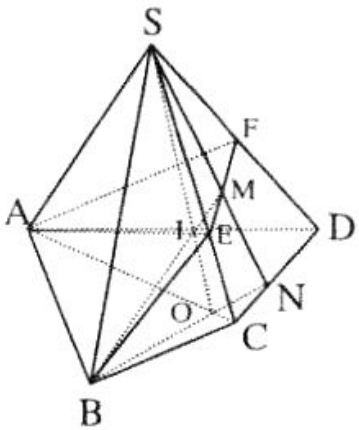
Ví dụ 2: (Bài 16/tr 51 – Sgk): *Cho hình chóp* S.ABCD. *Gọi* M *là một điểm nằm trong* ΔSCD.

a. *Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng* (SBM) *và* (SAC).

b. *Tìm giao điểm của đường thẳng* BM *và mặt phẳng* (SAC).

c. *Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng* (ABM).

Giải



a. Ta lần lượt thực hiện:

- Kéo dài SM cắt cạnh CD tại N.
- Nối BN cắt AC tại O.

Khi đó:

$(SBM) \cap (SAC) = SO.$

b. Nối BM cắt cạnh SC tại I.

Vậy, ta được I chính là giao điểm của BM và (SAC).

c. Ta lần lượt thực hiện:

- Nối AI cắt SC tại E.
- Nối EM cắt SD tại F.

Khi đó, các đoạn thẳng AB, BE, EF, FA là các đoạn giao tuyến của mặt phẳng (ABM) với hình chóp.

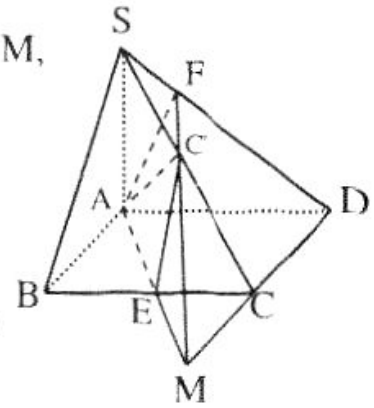
Vậy, thiết diện là tứ giác ABEF.

Ví dụ 3: *Cho hình chóp* S.ABCD *đáy là hình bình hành* ABCD. *Trong mặt phẳng đáy vẽ đường thẳng* (d) *đi qua* A *và không song song với các cạnh của hình bình hành,* (d) *cắt đoạn* BC *tại* E. *Gọi* C' *là một điểm nằm trên cạnh* SC.

a. *Tìm giao điểm* M *của* CD *và mặt phẳng* (C'AE).

b. *Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng* (C'AE).

Giải



a. Với giả thiết (d) cắt đoạn BC tại E thì (d) sẽ cắt CD tại M, khi đó M chính là giao điểm của CD và mặt phẳng (C'AE).

b. Ta tiếp tục thực hiện:

- Nối MC' cắt SD tại F.
- Nối AF.

Khi đó AE, EC', C'F, FA là các đoạn giao tuyến của mặt phẳng (C'AE) với các mặt của hình chóp.

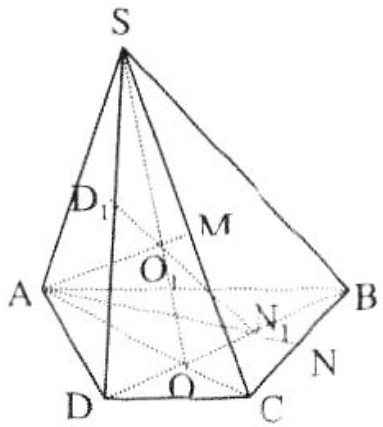
Vậy, thiết diện là tứ giác AEC'F.

Ví dụ 4: *Trong mặt phẳng* (α), *cho tứ giác* ABCD, S *là một điểm không thuộc* (α). M *là điểm trên cạnh* SC.

a. *Tìm giao điểm của* AM *và* (SBD).

b. *Gọi* N *là một điểm trên cạnh* BC, *tìm giao điểm của* SD *và* (AMN).

Giải



a. Chọn mặt phẳng phụ (SAC) chứa AM.

Gọi O là giao điểm của AC và BD, suy ra:

$(SAC) \cap (SBD) = SO$.

Trong mặt phẳng (SAC), ta có:

$SO \cap AM = O_1 \Rightarrow AM \cap (SBD) = O_1$.

b. Chọn mặt phẳng phụ (SBD) chứa SD.

Gọi N_1 là giao điểm của AN và BD, suy ra:

$(SBD) \cap (AMN) = N_1O_1$.

Trong mặt phẳng (SBD), ta có:

$N_1O_1 \cap SD = D_1 \Rightarrow SD \cap (AMN) = D_1$.

Vấn đề 4: THIẾT DIỆN CỦA HÌNH CHÓP

Phương pháp áp dụng

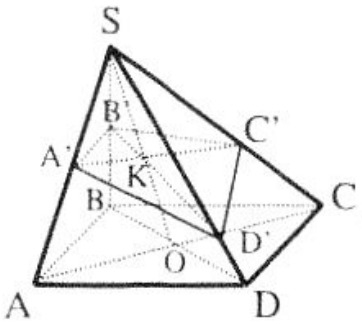
Để tìm thiết diện của một hình chóp với một mặt phẳng (P), ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Từ điểm chung có sẵn, xác định giao tuyến đầu tiên của (P) với một mặt của hình chóp (có thể là mặt phẳng trung gian).

Bước 2: Cho giao tuyến vừa tìm được cắt các cạnh của mặt đó của hình chóp, ta sẽ được các điểm chung mới của (P) với các mặt khác. Từ đó, xác định được giao tuyến với các mặt này.

Bước 3: Tiếp tục như trên tới khi các giao tuyến khép kín ta được thiết diện.

Ví dụ 1: (Bài 15/tr 51 – Sgk): *Cho hình chóp* S.ABCD. *Ba điểm* A', B', C' *lần lượt nằm trên ba cạnh* SA, SB, SC. *Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng* (A'B'C').



Giải

Giả sử AC cắt BD tại O.

Trong mặt phẳng (SAC), ta có:

$K = SO \cap A'C'$.

Trong mặt phẳng (SBD), kéo dài B'K cắt SD tại D'.

Vậy, ta được (A'B'C'D') là thiết diện cần tìm.

Nhận xét: Như vậy, để thực hiện được yêu cầu xác định thiết diện trong ví dụ trên chúng ta đã định hướng như sau:

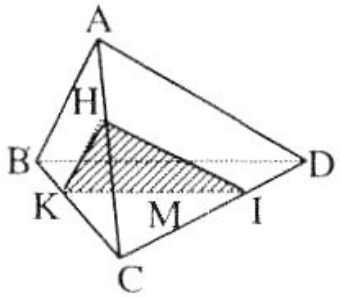
- Cần xác định các giao tuyến của mặt phẳng (A'B'C') với các mặt phẳng (SAD), (SCD). Và công việc này được chuyển thành việc xác định giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (A'B'C').
- Công việc trên là sự mở rộng tự nhiên của yêu cầu trong bài 11.a/tr 50 – Sgk đã được thực hiện ở bài toán 3.

Ví dụ 2: *Cho tứ diện* ABCD. *Gọi* H, K *lần lượt là trung điểm các cạnh* AC, BC. *Trong* ΔBCD *lấy điểm* M *sao cho hai đường thẳng* KM *và* CD *cắt nhau. Tìm thiết diện của tứ diện với mặt phẳng* (HKM).

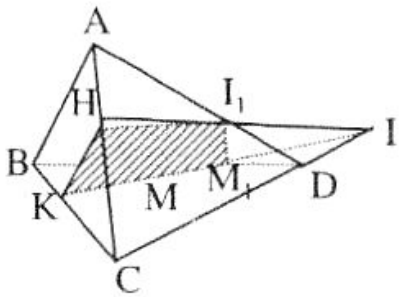
Giải

Gọi $I = KM \cap CD$. Ta có hai trường hợp:

(a)



(b)



Trường hợp 1: Điểm I thuộc đoạn CD (Hình a). Khi đó ta được ba đoạn giao tuyến là HK, KI và IH. Do đó, thiết diện cần tìm là ΔHIK.

Trường hợp 2: Điểm I ở ngoài đoạn CD (Hình b). Khi đó:

- Gọi $M_1 = KM \cap BD$.
- Nối IH cắt AD tại I_1.

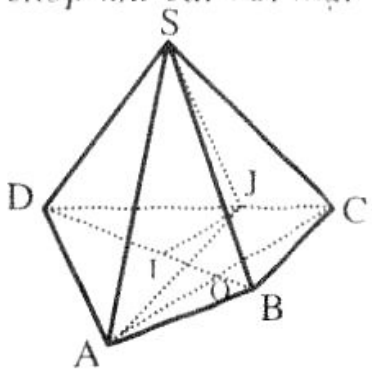
Ta được 4 đoạn giao tuyến là HK, KI và IH. Do đó, thiết diện cần tìm là tứ giác HKM_1I_1.

☞ ***Nhận xét***: Khi thực hiện ví dụ trên, một số em học sinh thường chỉ đưa ra được một trường hợp về thiết diện dựa theo tính chủ quan khi thiết lập vị trí của điểm M cho hình vẽ của mình. Cần luôn nhớ rằng có ba vị trí tương đối của điểm I (I thuộc đường thẳng CD, I khác C, D) so với đoạn thẳng CD.

Các em học sinh hãy thực hiện thêm yêu cầu *"Cho hình chóp* S.ABCD *đáy là tứ giác lồi. Gọi* H, K *lần lượt là trung điểm các cạnh* SA, AB. *Trong tứ giác* ABCD *lấy điểm* M. *Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng* (HKM)."

Ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ việc xác định thiết diện với điều kiện định lượng kèm theo.

Ví dụ 3: (Bài 18/tr 53 – Sbt): *Cho hình chóp* S.ABCD *đáy là tứ giác lồi. Mặt phẳng* (P) *đi qua* SA *và chia đáy hình chóp thành hai phần có diện tích bằng nhau. Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng* (P).



✍ *Giải*

Gọi I là trung điểm BD, dựng Ix // AC và Ix cắt một trong hai cạnh CB hoặc CD (giả sử Ix cắt CD tại J).

Khi đó, tam giác SAJ là thiết diện cần dựng.

Bạn đọc cần đi chứng minh rằng "Đường thẳng AJ chia tứ giác ABCD thành hai phần có diện tích bằng nhau".

☞ ***Hoạt động***: Các em học sinh hãy thực hiện thêm yêu cầu *"Cho hình chóp* S.ABC, *xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng* (P), *biết mặt phẳng* (P) *đi qua* SA *và chia* ΔABC *thành hai phần có*:

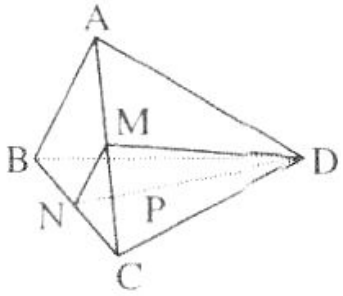
a. *Diện tích bằng nhau.* b. *Chu vi bằng nhau.*

Ví dụ 4: *Cho tứ diện* ABCD, *độ dài các cạnh bằng* 2a. *Gọi* M, N *lần lượt là trung điểm các cạnh* AC, BC, *gọi* P *là trọng tâm* ΔBCD. *Tính diện tích thiết diện của tứ diện với mặt phẳng* (MNP).

✍ *Giải*

a. *Xác định thiết diện*: Trong ΔBCD, ta thấy ngay N, P, D thẳng hàng. Suy ra MND là thiết diện cần dựng.

b. *Tính diện tích thiết diện.*



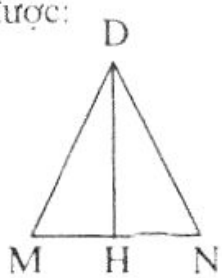
Xét ΔMND, ta có ngay:

$MN = \frac{1}{2}AB = a$, vì MN là đường trung bình.

$ND = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$, $MD = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$,

vì ND, MD là đường trung tuyến trong tam giác đều.

Như vậy ΔMND cân tại D, gọi H là chân đường cao hạ từ D, ta được:



$$S_{\Delta MND} = \frac{1}{2}MN.DH = \frac{1}{2}MN\sqrt{DM^2 - MH^2}$$

$$= \frac{1}{2}a.\sqrt{(a\sqrt{3})^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a^2\sqrt{11}}{4}.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, đi kèm với yêu cầu xác định thiết diện của hình chóp chúng ta thường gặp thêm đòi hỏi *"Tính diện tích của thiết diện"*. Và để tính được diện tích của thiết diện, chúng ta thường thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định được hình dạng đúng của thiết diện, từ đó thiết lập công thức tính diện tích. (1)

Bước 2: Sử dụng kiến thức trong hình học phẳng tính các giá trị về độ dài đoạn thẳng cần tìm hoặc số đo góc. (2)

Bước 3: Thay (2) vào (1), ta nhận được kết quả.

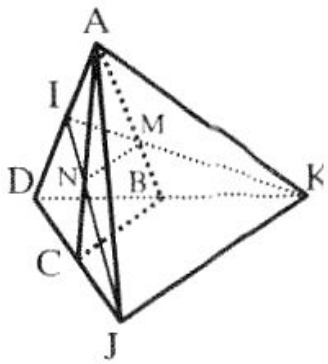
Tuy nhiên, trong những trường hợp thiết diện không phải là hình cơ bản chúng ta cần thực hiện phép chia nhỏ hình hoặc nguyên lí phần bù để tính được diện tích của nó.

Ví dụ 5: (Bài 19/tr 53 – Sbt): *Cho tứ diện đều* ABCD *có các cạnh bằng* a. *Gọi* I *là trung điểm của* AD, J *là điểm đối xứng với* D *qua* C, K *là điểm đối xứng với* D *qua* B.

a. *Tìm thiết diện của tứ diện với mặt phẳng* (IJK)

b. *Tính diện tích thiết diện được xác định ở câu* a).

✍ *Giải*



a. *Xác định thiết diện*: Ta có ngay:

- Nối I và K cắt AB tại M.
- Nối I và J cắt AC tại N.

Suy ra ΔIMN là thiết diện cần dựng.

b. *Tính diện tích thiết diện*: Diện tích ΔIMN sẽ được tính bằng công thức Hê–rông.

Ta lần lượt có:

- Vì M là trọng tâm ΔADK nên $AM = \frac{2}{3}AB = \frac{2a}{3}$.

Khi đó, trong ΔAIM ta có:

$$IM^2 = AI^2 + AM^2 - 2AI.AM.\cos A$$

$$= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{2a}{3}\right)^2 - 2.\frac{a}{2}.\frac{2a}{3}.\cos 60^0 = \frac{13a^2}{36}$$

$$\Leftrightarrow IM = \frac{a\sqrt{13}}{6}.$$

- Vì N là trọng tâm ΔADJ nên $AN = \frac{2}{3}AC = \frac{2a}{3}$. Khi đó:

$$\Delta AIM = \Delta AIN \Rightarrow IN = IM = \frac{a\sqrt{13}}{6}.$$

- Từ hai khẳng định trên, suy ra:

$$MN // BC \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow MN = \frac{2}{3}BC = \frac{2a}{3}.$$

Từ đó, ta được:

$$S_{\Delta IMN} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{13}}{6} + \frac{a}{3}\right).\frac{a}{3}.\frac{a}{3}.\left(\frac{a\sqrt{13}}{6} - \frac{a}{3}\right)} = \frac{a^2}{6}.$$

☞ ***Hoạt động***: Trong ví dụ trước, với thiết diện là tam giác cân chúng ta đi tính độ dài đường cao của nó, từ đó nhận được diện tích thiết diện. Tuy nhiên, trong ví dụ trên chúng ta lại sử dụng công thức Hê–rông với mục đích giúp các em học sinh ôn tập thêm các công thức tính diện tích tam giác.

Khi có thêm kiến thức về phép chiếu trong không gian, các em học sinh có thể sử dụng một cách khác để tính diện tích ΔIMN.

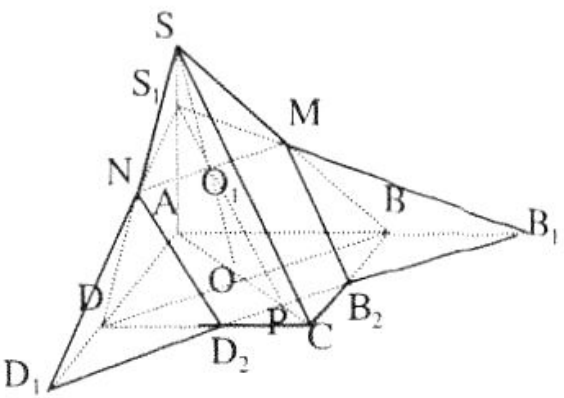
Ví dụ 6: *Cho hình chóp* SABCD *đáy là hình bình hành tâm* O. *Gọi* M, N, P *lần lượt là trung điểm* của SB, SD *và* OC.

a. *Tìm giao tuyến của* (MNP) *với* (SAC) *và tìm giao điểm của* SA *với* (MNP).

b. *Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng* (MNP).

c. *Tính tỷ số mặt phẳng* (MNP) *chia các cạnh* SA, BC *và* CD.

✍ *Giải*



a. Ta lần lượt thực hiện:

- Nối MN cắt SO tại O_1.
- Nối O_1P cắt SA tại S_1.

Vậy, ta được:

$(MNP) \cap (SAC) = PS_1$.

$(MNP) \cap SA = S_1$.

b. Ta lần lượt thực hiện:

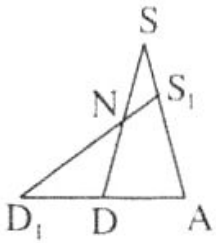
- Nối S_1N kéo dài cắt AD tại D_1.
- Nối S_1M kéo dài cắt AB tại B_1.
- Nối B_1D_1 cắt CD, CB theo thứ tự tại D_2, B_2.

Khi đó, ta được 5 đoạn giao tuyến là S_1M, MB_2, B_2D_2, D_2N và NS_1. Do đó thiết diện cần tìm là đa giác $S_1MB_2D_2N$.

c. Ta lần lượt có:

- MN là đường trung bình của ΔSBD nên O_1 là trung điểm của SO, suy ra:

$$PO_1 // SC \Rightarrow \frac{S_1S}{S_1A} = \frac{PC}{PA} = \frac{1}{3}.$$

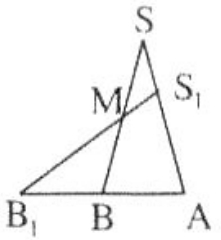


- Xét ΔSAD với S_1, N, D_1 thẳng hàng, theo định lí Mêlêlaus, ta được:

$$\frac{NS}{ND}.\frac{D_1D}{D_1A}.\frac{S_1A}{S_1S} = 1 \Rightarrow \frac{D_1D}{D_1A} = \frac{1}{3}. \quad (1)$$

- Xét ΔSAB với S_1, M, B_1 thẳng hàng, theo định lí Mêlêlaus, ta được:

$$\frac{MS}{MB}.\frac{B_1B}{B_1A}.\frac{S_1A}{S_1S} = 1 \Rightarrow \frac{B_1B}{B_1A} = \frac{1}{3}. \quad (2)$$



Từ (1), (2), suy ra:

$BD // B_1D_1 \Rightarrow B_2D_2$ là đường trung bình của ΔCBD

$\Rightarrow$ nên B_2, D_2 theo thứ tự là trung điểm BC, CD

Do đó:

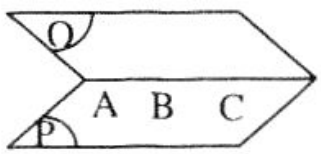
$$\frac{D_2D}{D_2C} = 1 \text{ và } \frac{B_2B}{B_2C} = 1.$$

☞ ***Chú ý***: Định lí Mêlêlaus có nội dung như sau: "*Trên các cạnh* AB, BC, CA *của* ΔABC *(hoặc trên phần kéo dài của chúng) lấy các điểm* C_1, A_1, B_1 *thì* C_1, A_1, B_1 *thẳng hàng khi và chỉ khi:* $\frac{A_1B}{A_1C}\frac{B_1C}{B_1A}\frac{C_1A}{C_1B} = 1$ ".

Vấn đề 5: CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

Phương pháp áp dụng

Để chứng minh 3 điểm thẳng hàng, ta chứng minh chúng cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt. Khi đó, chúng thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng đó.



Ví dụ 1: (Bài 5/tr 50 – Sgk): *Cho mặt phẳng* (P) *và ba điểm không thẳng hàng* A, B, C *cùng nằm ngoài* (P). *Chứng minh rằng nếu ba đường thẳng* AB, BC, CA *đều cắt* (P) *thì các giao điểm đó thẳng hàng.*

✍ *Giải*

Giả sử các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt cắt (P) tại D, E, F, ta đi chứng minh ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Trước tiên, ta thấy ngay ba điểm D, E, F thuộc mặt phẳng (P).

Mặt khác, ta có:

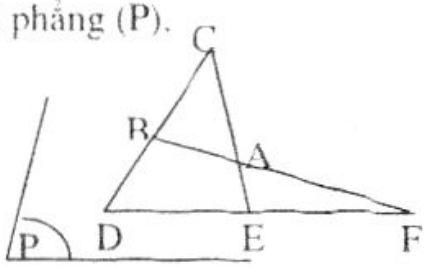
$D \in BC \subset (ABC) \Rightarrow D \in (ABC)$.

$E \in CA \subset (ABC) \Rightarrow E \in (ABC)$.

$F \in AB \subset (ABC) \Rightarrow F \in (ABC)$.

Vậy, ta được:

$(ABC) \cap (P) = \{D, E, F\} \Rightarrow D, E, F$ thẳng hàng.



☞ ***Chú ý***: Việc chứng minh được ba điểmA, B, C thẳng hàng với C cố định, chúng ta thực hiện được yêu cầu *"Chứng minh rằng đường thẳng* AB *luôn đi qua một điểm cố định"*.

Ví dụ 2: *Cho mặt phẳng* (P) *và 2 điểm* A, B *cố định ở ngoài* (P) *sao cho đường thẳng* AB *cắt mặt phẳng* (P) *tại điểm* C. M *là điểm di động trong không gian sao cho* MA, MB *cắt* (P) *tại* A_1, B_1. *Chứng minh* A_1B_1 *luôn đi qua một điểm cố định.*

✍ *Giải*

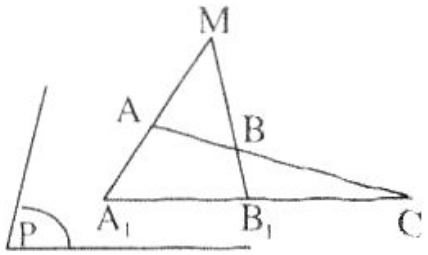
Trước tiên, ta thấy C là một điểm cố định.

Nhận xét rằng:

$(P) \cap (MAB) = \{A_1, B_1, C\}$

$\Rightarrow A_1, B_1, C$ thẳng hàng

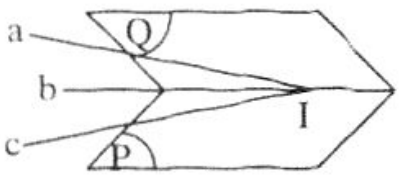
$\Leftrightarrow A_1B_1$ luôn đi qua điểm cố định C.



Vấn đề 6: CHỨNG MINH BA ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY

Phương pháp áp dụng

Để chứng minh 3 đường thẳng đồng quy, ta chứng minh giao điểm của hai đường thẳng này là điểm chung của hai mặt phẳng mà giao tuyến là đường thẳng thứ ba.



Ví dụ 1: *Trong mặt phẳng* (α), *cho* ΔBCD, A *là một điểm không thuộc* (α). *Gọi* E, F, G *lần lượt là 3 điểm trên 3 cạnh* AB, AC, BD *sao cho* EF *cắt* BC *tại* I, EG *cắt* AD *tại* H. *Chứng minh* CD, IG, HF *đồng quy.*

✍ *Giải*

Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Gọi O là giao điểm của HF và IG. Ta có:

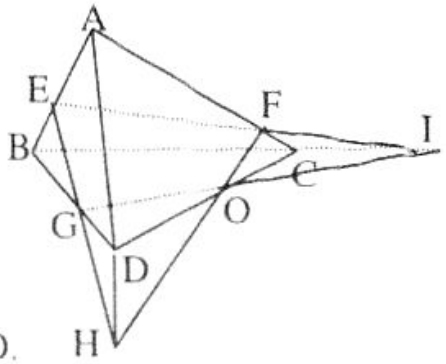
$O \in HF \subset (ACD) \Rightarrow O \in (ACD)$.

$O \in IG \subset (BCD) \Rightarrow O \in (BCD)$.

Suy ra:

$O \in (ACD) \cap (BCD) = CD$.

Vậy, ba đường thẳng CD, IG, HF đồng quy tại O.



Cách 2: Gọi O là giao điểm của HF và CD. Ta có:

$O \in HF \subset (HEF) \Rightarrow O \in (HEF)$.

$O \in CD \subset (BCD) \Rightarrow O \in (BCD)$.

Suy ra:

$O \in (HEF) \cap (BCD) = CD$.

Vậy, ba đường thẳng CD, IG, HF đồng quy tại O.

Cách 3: Gọi O là giao điểm của IG và CD – *Bạn đọc tự thực hiện.*

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, ba cách giải trong ví dụ trên chỉ mang tính minh hoạ.

Ví dụ 2: *Cho hình chóp* S.ABCD *có đáy* ABCD *là hình thang với* AB *là đáy lớn. Gọi* M *là trung điểm của đoạn* AB, E *là giao điểm của hai cạnh bên của hình thang* ABCD *và* G *là trọng tâm của tam giác* ECD.

a. *Chứng minh rằng bốn điểm* S, E, M, G *cùng thuộc một mặt phẳng* (α) *và mặt phẳng này cắt cả hai mặt phẳng* (SAC) *và* (SBD) *theo cùng một giao tuyến* (d).

b. *Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng* (SAD) *và* (SBC).

c. *Lấy một điểm* K *trên đoạn* SE *và gọi* $C' = SC \cap KB$, $D' = SD \cap KA$. *Chứng minh rằng* AC', BD' *và đường thẳng* (d) *nói trên đồng quy.*

✍ *Giải*

a. Vì ABCD là hình thang nên:

EM đi qua trung điểm của $CD \Rightarrow G \in EM$

$\Rightarrow$ S, E, M, G cùng thuộc mặt phẳng (α).

b. Giả sử AC cắt BD tại O thì $O \in EM$, từ đó suy ra ba mặt phẳng (α), (SAC) và (SBD) cắt nhau theo giao tuyến SO.

Ta có ngay:

$(SAD) \cap (SBC) = SE$.

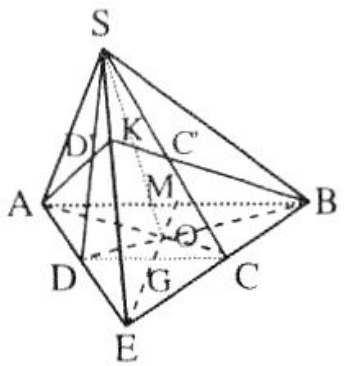
c. Giả sử AC' cắt BD' tại O', suy ra:

$O' \in AC' \subset (SAC) \Rightarrow O' \in (SAC)$,

$O' \in BD' \subset (SBD) \Rightarrow O' \in (SBD)$,

Từ đó, suy ra:

$O' \in (SAC) \cap (SBD) = d$.



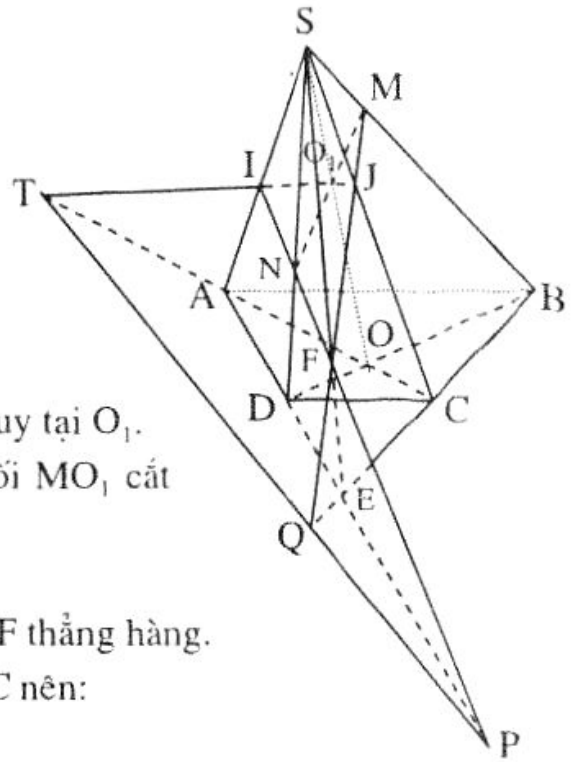
Ví dụ 3: *Trong mặt phẳng* (α), *cho tứ giác* ABCD, S *là một điểm không thuộc* (α). *Gọi* I, J *là hai điểm cố định trên* SA *và* SC *với* SI > IA *và* SJ < JC. *Một mặt phẳng* (β) *quay quanh* IJ *cắt* SB *tại* M, SD *tại* N.

a. *Chứng minh rằng* IJ, MN *và* SO *đồng quy (với* O *là giao điểm của* AC *và* BD). *Suy ra cách dựng điểm* N *khi biết điểm* M.

b. AD *cắt* BC *tại* E, IN *cắt* MJ *tại* F. *Chứng minh* S, E, F *thẳng hàng.*

c. IN *cắt* AD *tại* P, MJ *cắt* BC *tại* Q. *Chứng minh rằng* PQ *luôn đi qua một điểm cố định khi* (α) *di động.*

✍ *Giải*



a. Giả sử $IJ \cap SO = O_1$.

Ta có:

$O_1 \in IJ \subset (\beta) \Rightarrow O_1 \in (\beta)$,

$O_1 \in SO \subset (SBD) \Rightarrow O_1 \in (SBD)$.

Suy ra:

$O_1 \in (\beta) \cap (SBD) = MN$.

Vậy, ba đường thẳng IJ, MN, SO đồng quy tại O_1.

Như vậy, khi biết điểm M ta chỉ cần nối MO_1 cắt SD tại N.

b. Nhận xét rằng:

$(SAD) \cap (SBC) = \{S, E, F\} \Rightarrow$ S, E, F thẳng hàng.

c. Trước tiên, vì IJ không song song với AC nên:

$IJ \cap AC = T$ – là một điểm cố định.

Nhận xét rằng:

$\beta \cap (ABCD) = \{T, P, Q\} \Rightarrow$ T, P, Q thẳng hàng

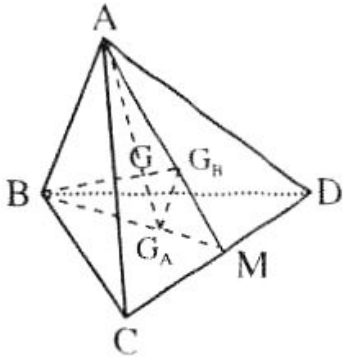
$\Leftrightarrow$ PQ luôn đi qua điểm cố định T.

☞ ***Chú ý***: Trong một số trường hợp chúng ta đi chứng minh ba đường thẳng đồng quy dựa trên tính chất điểm.

Ví dụ 4: *Cho bốn điểm* A, B, C *và* D *không đồng phẳng. Gọi* G_A, G_B, G_C, G_D *lần lượt là trọng tâm của các tam giác* BCD, CDA, ABD, ABC. *Chứng minh rằng* AG_A, BG_B, CG_C, DG_D *đồng quy.*

✍ *Giải*

Ta có thể trình bày theo hai cách sau:



Cách 1: Gọi M là trung điểm CD, ta có nhận xét:

$$\frac{MG_A}{MB} = \frac{MG_B}{MA} = \frac{1}{3} \Rightarrow G_AG_B \,//\, BA.$$

Gọi G là giao điểm của AG_A và BG_B, ta có:

$$\frac{G_AG}{AG} = \frac{G_BG}{BG} = \frac{G_AG_B}{AB} = \frac{1}{3}.$$

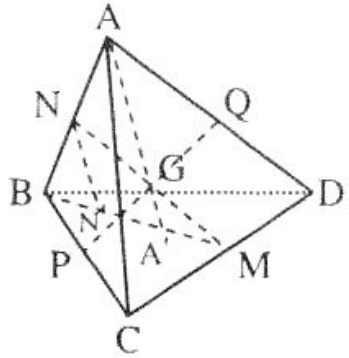
Chứng minh tương tự ta cũng nhận được khẳng định AG_A và CG_C cũng cắt nhau tại G.

Vậy, ba đoạn AG_A, BG_B, CG_C, DG_D đồng quy tại G.

Cách 2: Gọi G là trọng tâm của tứ diện ABCD (trung điểm đoạn MN).

Nối AG cắt BM tại A', ta cần chứng minh A' là trọng tâm ΔBCD.

Kẻ NN' song song với AA' (N' ∈ BM), khi đó:



NN' là đường trung bình của ΔABA'

$\Rightarrow$ N'B = N'A'. (1)

GA' là đường trung bình của ΔN'MN

$\Rightarrow$ N'A' = MA'. (2)

Từ (1) và (2) suy ra BA' = 2MA'.

Và vì A' thuộc trung tuyến BM của ΔBCD nên A' là trọng tâm ΔBCD, tức là A' ≡ G_A hay nói cách khác AG_A đi qua G.

Chứng minh tương tự, ta có BG_B, CG_C đi qua G.

Vậy, ba đoạn AG_A, BG_B, CG_C, DG_D đồng quy tại G.

Vấn đề 7: (*BÀI TOÁN QUỸ TÍCH*): TÌM TẬP HỢP GIAO ĐIỂM CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG DI ĐỘNG

Phương pháp áp dụng

Gọi M là giao điểm hai đường thẳng di động (d_1), (d_2). Để tìm tập hợp các điểm M ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: *Phần thuận*: Tìm hai mặt phẳng cố định lần lượt chứa (d_1) và (d_2). M di động trên giao tuyến cố định d của hai mặt phẳng đó.

Bước 2: *Giới hạn* (nếu có) được tập $\bar{d}$.

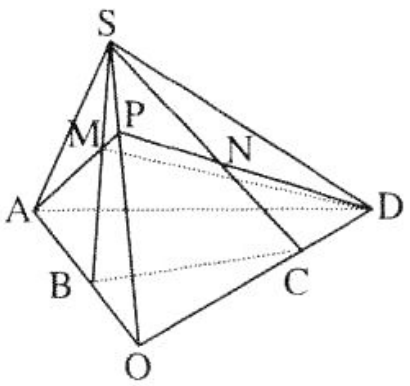
Bước 3: *Phần đảo*: Gọi M là điểm bất kỳ trên $\bar{d}$, ta đi chứng minh M là giao điểm của hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

Bước 4: *Kết luận.*

☞ ***Chú ý***: Nếu (d) di động nhưng luôn đi qua điểm cố định A và cắt đường thẳng cố định (a) không qua A thì d thuộc mặt phẳng cố định (A, a).

Ví dụ 1: *Trong mặt phẳng* (α), *cho tứ giác* ABCD *có* AB *và* CD *không song song.* S *là một điểm không thuộc* (α), M *là điểm di động trên cạnh* SB. *Mặt phẳng* (ADM) *cắt* SC *tại* N. *Tìm tập hợp giao điểm của* AM *và* DN.

✍ *Giải*



Phần thuận: Ta có:

AM ⊂ (SAB) – cố định.

Mặt khác, vì DN đi qua điểm cố định D và cắt đường thẳng cố định SC nên:

DN ⊂ (SCD) – cố định.

Giả sử AB cắt CD tại O, ta có ngay:

(SAB) ∩ (SCD) = SO.

Vậy, tập hợp giao điểm P của AM và định nghĩa thuộc đường thẳng SO.

Giới hạn: Khi M di chuyển trên cạnh SB thì P di chuyển trên đoạn SO.

Phần đảo: Gọi P là điểm bất kỳ trên SO.

- Nối AP cắt SB tại M.
- Nối DP cắt SC tại N, N là giao điểm của mặt phẳng (ADM) với SC và P chính là giao điểm của AM và DN.

Kết luận: Vậy tập hợp các điểm P là đoạn SO.

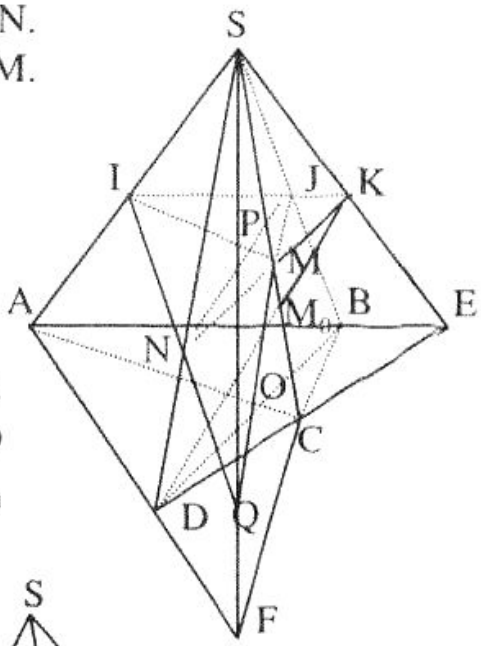
Ví dụ 2: *Trong mặt phẳng* (α), *cho tứ giác* ABCD, AB *và* CD *kéo dài cắt nhau tại* E, AD *và* BC *kéo dài cắt nhau tại* F *và* AD < DF. S *là một điểm không thuộc* (α). *Gọi* I, J *lần lượt là trung điểm của* SA, SB. (α) *là mặt phẳng di động qua* IJ. (α) *cắt* SC, SD *lần lượt tại* M, N.

a. *Chứng minh rằng* IJ, MN, SE *đồng quy.*

b. M *chuyển động trên phần nào của cạnh* SC?

c. *Tìm tập hợp giao điểm của* IM *và* JN.

d. *Tìm tập hợp giao điểm của* IN *và* JM.



Giải

a. Gọi $K = IJ \cap MN$, ta có:

$K \in IJ \subset (SAB) \Rightarrow K \in (SAB)$.

$K \in MN \subset (SCD) \Rightarrow K \in (SCD)$.

Do đó $K \in SE = (SAB) \cap (SCD)$.

Vậy, ba đường thẳng IJ, MN, SE đồng quy tại K.

b. Nối KD cắt SC tại M_0. Vì N chạy trên cạnh SD nên tia KMN quét góc $\widehat{SKD}$, do đó M chạy từ S đến M_0 vì khi đó (α) mới cắt cạnh SC, SD.

c. Gọi $P = IM \cap JN$. Ta đi tìm tập hợp điểm P.

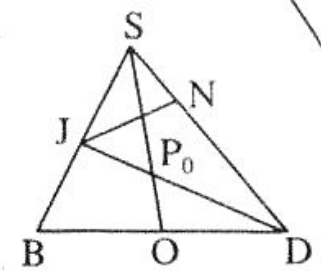
Phần thuận: Ta có:

$P \in IM \subset (SAC) \Rightarrow P \in (SAC)$.

$P \in JN \subset (SBD) \Rightarrow P \in (SBD)$.

Do đó:

$P \in SO = (SAC) \cap (SBD)$.



Giới hạn: Nối DJ cắt SO tại P_0. Vì N chạy trên cạnh SD nên tia JPN quét góc $\widehat{SJD}$, do đó P chạy từ S đến P_0 vì khi đó (α) mới cắt cạnh SC, SD.

Phần đảo. Gọi P là điểm bất kỳ trên SP_0. Nối JP cắt SD tại N, nối IP cắt SC tại M. M, N là giao điểm của mặt phẳng (IJMN) qua IJ với các cạnh SC, SD và P chính là giao điểm của IM và JN.

Kết luận: Vậy tập hợp các điểm P là đoạn SP_0 trên SO.

d. Gọi $Q = IN \cap JM$. Ta đi tìm tập hợp điểm Q.

Phần thuận: Ta có:

$Q \in IN \subset (SAD) \Rightarrow Q \in (SAD)$.

$Q \in JM \subset (SBC) \Rightarrow Q \in (SBC)$.

Do đó:

$Q \in SF = (SAD) \cap (SBC)$.

Giới hạn: Vì AD < DF, nên tia Ix song song với SF và cắt cạnh SD tại N_0. Vậy N chạy từ S tới N_0. Nối IN_0 cắt SF tại F_0, do đó Q chạy từ S đến F_0.

Phần đảo: Gọi Q là điểm bất kỳ trên SF_0. Nối IQ cắt SD tại N, nối JQ cắt SC tại M. M, N là giao điểm của mặt phẳng (IJMN) qua IJ với các cạnh SC, SD và Q chính là giao điểm của IN và JM.

Kết luận: Vậy tập hợp các điểm Q là đoạn SF_0 trên SF.

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài tập 1: Vẽ hình biểu diễn của:

a. Hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$.
b. Hình lăng trụ đứng $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ với ABCD là hình thang (AB // CD).
c. Hình chóp đều S.ABC.
d. Hình chóp đều S.ABCD.

Bài tập 2: Trong không gian cho n điểm phân biệt và không có ba điểm nào thẳng hàng.

a. Hỏi có thể tạo được bao nhiêu đường thẳng từ n điểm đó?
b. Hỏi có thể tạo được bao nhiêu mặt phẳng từ n điểm đó?

Bài tập 3:

a. Cho ví dụ về bốn điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng.
b. Em hãy giải thích vì sao đồ vật có 4 chân thường bị cập kềnh.

Bài tập 4:

a. Muốn xác định giao tuyến của hai mặt phẳng phân biệt thì ta cần tìm bao nhiêu điểm chung của chúng?
b. Chúng ta có thể kết luận được điều gì khi biết ba điểm phân biệt A, B, C đều thuộc hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q)?

Bài tập 5:

a. Nêu phương pháp để chứng minh đường thẳng (a) thuộc mặt phẳng (P)
b. Nếu biết $A \in (a)$ và $(a) \subset (P)$ thì có thể kết luận được rằng $A \in (P)$ hay không?

Bài tập 6:

a. Có hình chóp nào mà số cạnh (cạnh bên và cạnh đáy) của nó là một số lẻ không? Tại sao?
b. Hình chóp có 10 cạnh thì có bao nhiêu mặt?

Bài tập 7: Trong mặt phẳng (α), cho hai nửa đường thẳng song song Ax, By. M và N là hai điểm lần lượt thuộc Ax và By; $M \neq A$ và $N \neq B$. C là điểm cố định không thuộc (α).

a. Chứng minh rằng bốn điểm O, A, M, N không đồng phẳng.
b. M, N di động, chứng tỏ rằng đường thẳng OI nối O với trung điểm I của MN nằm trong mặt phẳng cố định.
c. M, N di động nhưng AM + BN có giá trị không đổi. Chứng minh rằng mặt phẳng (OMN) luôn chứa một đường thẳng cố định.

Bài tập 8: Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên BD lấy điểm P sao cho BP = 2PD.

a. Tìm giao điểm của đường thẳng CD với mặt phẳng (MNP).
b. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (ACD).

Bài tập 9: Trong mặt phẳng (α), cho ΔABC, D là một điểm không thuộc (α). M là một điểm bên trong ΔABD, N là một điểm bên trong ΔACD.

a. Tìm giao tuyến của (AMN) và (BCD).
b. Tìm giao tuyến của (DMN) và (ABC).

Bài tập 10: Trong mặt phẳng (α), cho ΔABC, D là một điểm không thuộc (α). O là điểm bên trong ΔBCD, M là điểm trên AO.

a. Tìm giao tuyến của (MCD) với các mặt phẳng (ABC) và (ABD).
b. Cho I, J là hai điểm trên BC và BD. Tìm giao tuyến của (IJM) và (ACD).

Bài tập 11: Trong mặt phẳng (α), cho ΔABC, D là một điểm không thuộc (α). Qua C dựng mặt phẳng (γ) cắt AB, BD tại C_1, C_2, qua B dựng mặt phẳng (β) cắt AC, CD tại B_1, B_2. BB_1, CC_1 cắt nhau tại O_1; BB_2, CC_2 cắt nhau tại O_2. Giả sử O_1O_2 kéo dài cắt DA tại I.

a. Chứng minh AO_1, DO_2, BC đồng quy.
b. Chứng minh I, B_1, B_2 và I, C_1, C_2 thẳng hàng.

Bài tập 12: Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi I, J là hai điểm cố định trên AB, AC và IJ không song song với BC. (α) là mặt phẳng quay quanh IJ. (α) cắt CD, BD lần lượt tại M, N.

a. Chứng minh rằng MN luôn đi qua một điểm cố định.
b. Tìm tập hợp giao điểm của IM và JN.
c. Tìm tập hợp giao điểm của IN và JM.

Bài tập 13: Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm SB, G là trọng tâm ΔSAD.

a. Tìm giao điểm I của GM và mặt phẳng (ABCD). Chứng minh rằng CD nằm trong mặt phẳng (CGM).
b. Chứng minh rằng (CGM) đi qua trung điểm của SA. Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi (CGM).
c. Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi (AGM).

Bài tập 14: Cho tứ diện ABCD có độ dài các cạnh bằng a. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Gọi G là trọng tâm ΔACD

a. Tính độ dài IJ.
b. M là điểm di động trên đoạn BC. Tìm tập hợp giao điểm N của AM và (ICD).
c. Xác định thiết diện của tứ diện với (IGM) khi M là trung điểm của BC. Thiết diện trong là hình gì? Tính diện tích của nó.
d. Tính các tỉ số mà (IGM) chia các cạnh CD và AD.

CHỦ ĐỀ 2 HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG PHÂN BIỆT

Cho 2 đường thẳng (a) và (b). Căn cứ vào sự đồng phẳng và số điểm chung của 2 đường thẳng ta có bốn trường hợp sau:

a. *Hai đường thẳng song song*: cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung, tức là:

$$(a) \,//\, (b) \Leftrightarrow \begin{cases} (a) \subset (P) \text{ và } (b) \subset (P) \\ (a) \cap (b) = \varnothing \end{cases}.$$

b. *Hai đường thẳng cắt nhau*: chỉ có một điểm chung.

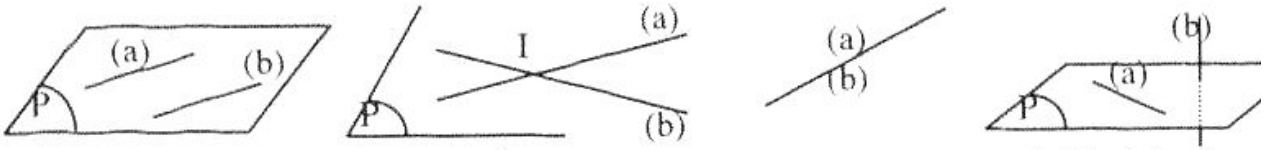
$$(a) \text{ cắt } (b) \Leftrightarrow (a) \cap (b) = \{I\}.$$

c. *Hai đường thẳng trùng nhau*: có hai điểm chung phân biệt.

$$(a) \cap (b) = \{A, B\} \Leftrightarrow (a) \equiv (b).$$

d. *Hai đường thẳng chéo nhau*: không cùng thuộc một mặt phẳng.

(a) chéo (b) $\Leftrightarrow$ (a), (b) không đồng phẳng.



(a)//(b) (a) cắt (b) a≡b (a),(b) chéo nhau

2. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Tính chất 1: *Trong không gian, qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đó.*

Tính chất 2: *Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.*

☞ ***Nhận xét***: Tính chất trên cung cấp cho chúng ta thêm một phương pháp để chứng minh hai đường thẳng trong không gian là song song với nhau.

Định lí *(Về giao tuyến của ba mặt phẳng): Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.*

Hệ quả: *Nếu hai mặt phẳng lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) song song với hai đường thẳng đó (hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó).*

ABC

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

Phương pháp áp dụng

Để chứng minh hai đường thẳng (a), (b) chéo nhau, ta thường sử dụng phương pháp chứng minh phản chứng, cụ thể ta thực hiện theo các bước:

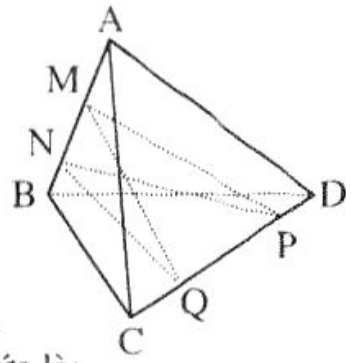
Bước 1: Giả sử (a), (b) không chéo nhau, tức là có một mặt phẳng (P) chứa cả (a) và (b).

Bước 2: Suy ra một kết luận vô lý (trái với giả thiết hoặc trái với các tiên đề, các định lí).

Bước 3: Kết luận rằng hai đường thẳng (a), (b) chéo nhau.

Ví dụ 1: (Bài 18/tr 55 – Sgk): *Cho tứ diện* ABCD. *Gọi* M, N *là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng* AB; P, Q *là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng* CD. *Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng* MQ, NP *và vị trí tương đối của hai đường thẳng* MP, NQ.

✍ *Giải*



a. Hai đường thẳng MQ, NP chéo nhau, bởi nếu trái lại tức là:

MQ và NP đồng phẳng

⇒ Bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng

⇒ MN và PQ đồng phẳng

⇒ AB và CD đồng phẳng, điều này là mâu thuẫn.

b. Hai đường thẳng MP, NQ chéo nhau, bởi nếu trái lại tức là:

MP và NQ đồng phẳng ⇒ bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng

⇒ MN và PQ đồng phẳng ⇒ AB và CD đồng phẳng

điều đó là mâu thuẫn.

Ví dụ 2: *Cho hai đường thẳng chéo nhau* (a), (b). *Trên* (a) *lấy hai điểm phân biệt* A, B; *trên (b) lấy hai điểm phân biệt* C, D.

a. *Chứng minh rằng* AC *và* BD *chéo nhau.*

b. M *là một điểm trên cạnh* AC, N *là một điểm trên cạnh* BD. MN *có thể song song với* AB *hoặc* CD *được không?*

c. O *là điểm trên đoạn* MN. *Chứng minh rằng* AO *cắt* CN, *và* BO *cắt* DM.

✍ *Giải*

a. Giả sử AC và BD không chéo nhau, suy ra:

AC và BD đồng phẳng ⇒ AB và CD đồng phẳng điều này mâu thuẫn với giả thiết.

Vậy, ta có AC và BD chéo nhau.

b. MN không thể song song với AB hoặc CD bởi:

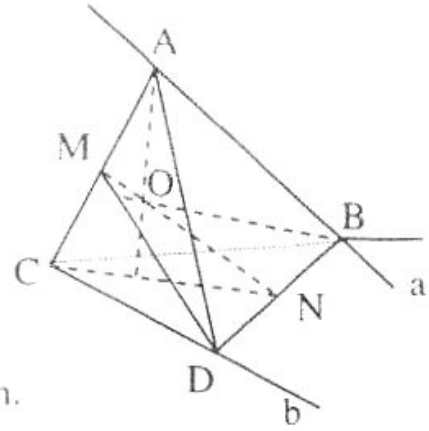
- Nếu MN // AB thì:

MN và AB đồng phẳng

$\Rightarrow$ AM và BN đồng phẳng

$\Rightarrow$ AC và BD đồng phẳng

điều đó mâu thuẫn.



- Nếu MN // CD thì:

MN và CD đồng phẳng

$\Rightarrow$ CM và DN đồng phẳng

$\Rightarrow$ AC và BD đồng phẳng, mâu thuẫn.

c. Ta lần lượt:

- *Chứng minh AO cắt CN*: Ta có:

$O \in MN \Rightarrow O \in (CMN)$ và $A \in CM \Rightarrow A \in (CMN)$

$\Rightarrow$ AO và CN đồng phẳng.

Ngoài ra, AO và CN không thể song song với nhau bởi nếu:

AO // CN $\Rightarrow$ O nằm ngoài đoạn MN, mâu thuẫn với giả thiết.

Vậy, ta có kết luận AO cắt CN.

- Tương tự ta chứng minh được BO cắt DM.

Vấn đề 2: CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Phương pháp áp dụng

Để chứng minh hai đường thẳng song song với nhau ta có thể sử dụng một trong các cách sau:

Cách 1: Chứng minh 2 đường thẳng đó đồng phẳng, rồi áp dụng phương pháp chứng minh song song trong hình học phẳng (như tính chất đường trung bình của tam giác, định lí Talét đảo, tính chất song song của hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba, ...).

Cách 2: Chứng minh 2 đường thẳng đó cùng song song với đường thẳng thứ 3.

Cách 3: Áp dụng định lí về giao tuyến.

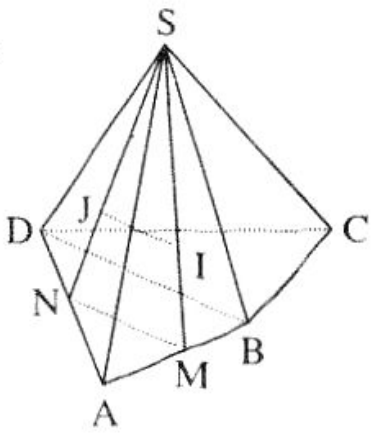
☞ ***Chú ý***: Trong một vài trường hợp đặc thù chúng ta cần kết hợp cách 1 và 2. Cụ thể, để chứng minh (a) // (b) ta đi chứng minh nó cùng song song với (c), trong đó việc chứng minh (a) // (c) hoặc (b) // (c) được sử dụng ý tưởng của cách 1.

Ví dụ 1: *Cho hình chóp* S.ABCD. *Gọi* I, J *lần lượt là trọng tâm* ΔSAB *và* ΔSAD. *Chứng minh rằng* IJ // BD.

✍ *Giải*

Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, AD, ta có:

$$\frac{SI}{SM}=\frac{2}{3} \text{ và } \frac{SJ}{SN}=\frac{2}{3} \Rightarrow IJ \,//\, MN. \qquad (1)$$



Mặt khác, trong ΔABD ta có MN là đường trung bình nên:

$$MN \,//\, BD. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

IJ // BD, đpcm.

Ví dụ 2: *Cho hình chóp* S.ABCD *đáy* ABCD *là hình thang với các cạnh đáy* AB *và* CD (AB > CD). *Gọi* M, N *lần lượt là trung điểm của* SA, SB.

a. *Chứng minh rằng* MN // CD.

b. *Tìm giao điểm* P *của* SC *và mặt phẳng* (ADN).

c. *Kéo dài* AN *và* DP *cắt nhau tại* I. *Chứng minh rằng* SI // AB // CD. *Tứ giác* SABI *là hình gì?*

✍ *Giải*

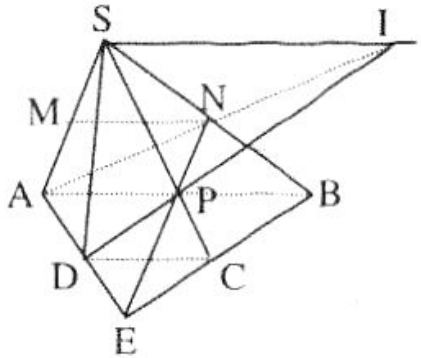
a. Trong ΔSAB, ta có MN đường trung bình nên:

$$MN \,//\, AB. \qquad (1)$$

Mặt khác, hình thang ABCD đáy AB, CD nên:

$$AB \,//\, CD. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra MN // CD.



b. Gọi $E = AD \cap BC$.

$P = SC \cap EN \subset (ADN)$

$\Rightarrow P = SC \cap (ADN)$.

c. Ta có:

$$\begin{cases} AB \in (SAB) \text{ và } CD \in (SCD) \\ AB \,//\, CD \\ (SAB) \cap (SCD) = SI \end{cases} \Rightarrow SI \,//\, AB \,//\, CD.$$

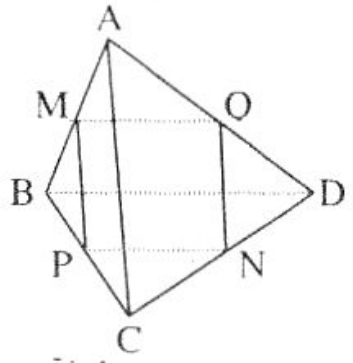
Nhận xét rằng:

$$MN \overset{//}{=} \frac{1}{2} SI \text{ và } MN \overset{//}{=} \frac{1}{2} AB \Rightarrow SI \overset{//}{=} AB \Leftrightarrow SABI \text{ là hình bình hành.}$$

☞ ***Nhận xét***: Câu c) của ví dụ trên đã minh hoạ cho các em học sinh biết cách trình bày khi sử dụng định lí về giao tuyến để chứng minh ba (hoặc hai) đường thẳng song song.

Các ví dụ tiếp theo sẽ minh hoạ việc sử dụng tính chất song song của hai đường thẳng trong không gian để giải toán.

Ví dụ 3: *Cho tứ diện* ABCD. *Gọi* M, N, P, Q, R, S *lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng* AB, CD, BC, AD, AC, BD. *Chứng minh* MPNQ *là hình bình hành. Từ đó, suy ra 3 đoạn* MN, PQ, RS *đồng quy tại trung điểm* G *của mỗi đoạn. Điểm* G *được gọi là* ***trọng tâm của tứ diện*** ABCD.



Giải

Từ giả thiết ta có ngay:

$$MP \overset{//}{=} \frac{1}{2}AC \text{ và } NQ \overset{//}{=} \frac{1}{2}AC$$

$$\Rightarrow MP \overset{//}{=} NQ \Leftrightarrow MPNQ \text{ là hình bình hành.}$$

Từ kết quả đó, suy ra MN và PQ cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn.

Bằng cách lập luận tương tự như trên, chúng ta cũng có MRNS là hình bình hành, từ đó suy ra MN và RS cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn.

Vậy, ba đoạn MN, PQ, RS đồng quy tại trung điểm G của mỗi đoạn.

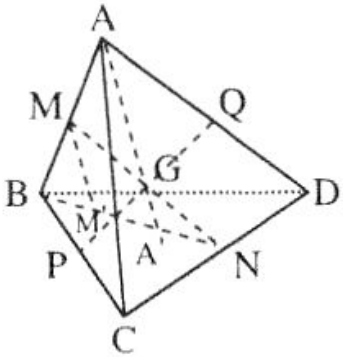
Ví dụ 4: (Bài 22/tr 55 – Sgk): *Gọi* G *là trọng tâm của tứ diện* ABCD.

a. *Chứng minh rằng đường thẳng đi qua điểm* G *và một đỉnh của tứ diện sẽ đi qua trọng tâm của mặt đối diện với đỉnh ấy.*

b. *Gọi* A' *là trọng tâm của* ΔBCD. *Chứng minh rằng* GA = 3GA'.

Giải

a. Nối AG cắt BN tại A', ta cần chứng minh A' là trọng tâm ΔBCD.



Kẻ MM' song song với AA' (M' ∈ BN), khi đó:

MM' là đường trung bình của ΔABA'

$\Rightarrow$ M'B = M'A'. (1)

GA' là đường trung bình của ΔM'MN

$\Rightarrow$ M'A' = NA'. (2)

Từ (1) và (2) suy ra BA' = 2NA'.

Và vì A' thuộc trung tuyến BN của ΔBCD nên A' là trọng tâm ΔBCD.

b. Xét ΔABA' với M, G, N thẳng hàng, theo định lí Mêlêlaus, ta được:

$$\frac{MB}{MA}\cdot\frac{GA}{GA'}\cdot\frac{NA'}{NB} = 1 \Rightarrow \frac{GA}{GA'} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow GA = 3GA', \text{ đpcm.}$$

Vấn đề 3: TÌM GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT PHẲNG THIẾT DIỆN CHỨA MỘT ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MỘT ĐƯỜNG THẲNG CHO TRƯỚC

Phương pháp áp dụng

1. Để tìm giao tuyến của 2 mặt phẳng ngoài phương pháp "*Tìm 2 điểm chung của 2 mặt phẳng*", ta sử dụng định lí về giao tuyến, như sau:

Bước 1: Chỉ ra rằng (α), (β) lần lượt chứa hai đường thẳng song song (a) và (b).

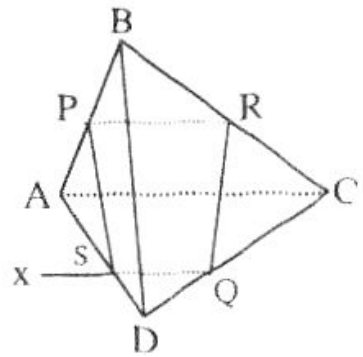
Bước 2: Tìm một điểm chung M của hai mặt phẳng.

Bước 3: Khi đó (α) ∩ (β) = Mx // (a) // (b).

2. Thiết diện cắt bởi một mặt phẳng chứa một đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước được xác định bằng cách phối hợp hai cách xác định giao tuyến đã biết.

Ví dụ 1: (Bài 20/tr 55 – Sgk): *Cho tứ diện* ABCD *và ba điểm* P, Q, R *lần lượt nằm trên cạnh* AB, CD, BC. *Hãy xác định giao điểm* S *của mặt phẳng* (PQR) *với cạnh* AD *nếu*:

a. PR // AC. b. PR cắt AC.



Giải

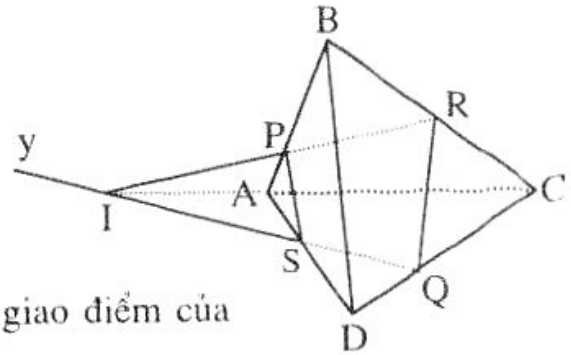
a. Ta có:

$$\begin{cases}(ABC)\cap(ACD)=AC\\(ABC)\cap(PQR)=PR\\(ACD)\cap(PQR)=Qx\\PR\ //\ AC\end{cases}\Rightarrow Qx\ //\ PR\ //\ AC.$$

Giả sử Qx cắt AD tại S thì S chính là giao điểm của (PQR) với cạnh AD.

b. Ta có:

$$\begin{cases}(ABC)\cap(ACD)=AC\\(ABC)\cap(PQR)=PR\\(ACD)\cap(PQR)=Qx\\PR\cap AC=\{I\}\end{cases}$$



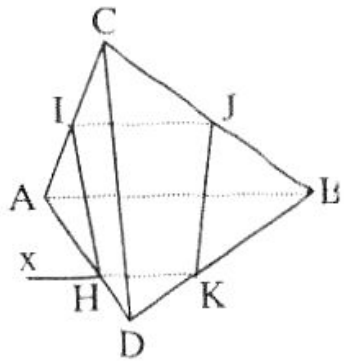
⇒ Qy, PR và AC đồng quy tại I.

Giả sử Qx cắt AD tại S thì S chính là giao điểm của (PQR) với cạnh AD.

Ví dụ 2: *Cho tứ diện* ABCD, *các cạnh bằng nhau và bằng* 6a. *Gọi* I, J *lần lượt là trung điểm của* AC, BC. *Gọi* K *là một điểm trên cạnh* BD *với* KB = 2KD.

a. *Xác định thiết diện của tứ diện với mặt phẳng* (IJK). *Chứng minh thiết diện là hình thang cân.*

b. *Tính diện tích thiết diện theo* a.



✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\begin{cases}AB\in(ABD)\text{ và }IJ\in(IJK)\\AB\ //\ IJ\\(ABD)\cap(IJK)=Kx\end{cases}\Rightarrow Kx\ //\ AB\ //\ IJ.$$

Giả sử Kx cắt AD theo thứ tự tại H. Khi đó ta được 4 đoạn giao tuyến là IJ, IH, HK và KJ. Do đó thiết diện là hình thang IJKH.

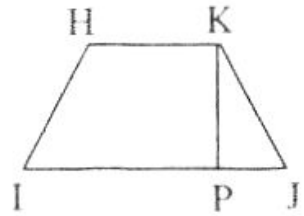
Mặt khác, ta thấy ngay:

$\Delta ACD = \Delta BCD \Rightarrow IH = JK$.

Vậy, thiết diện IJKH là hình thang cân.

b. Trong ΔABC, ta có:

$$IJ = \frac{1}{2}AB = 3a.$$



Trong ΔABD, ta có:

$$\frac{HK}{AB} = \frac{KD}{BD} = \frac{1}{3} \Rightarrow HK = \frac{1}{3}AB = 2a.$$

Trong ΔBJK, ta có:

$BJ = 3a$, $BK = 4a$

$$JK^2 = BJ^2 + BK^2 - 2BJ.BK.\cos\widehat{KBJ} = (3a)^2 + (4a)^2 - 2.3a.4a.\cos 60^0 = 13a^2$$

$$\Rightarrow JK = a\sqrt{13}.$$

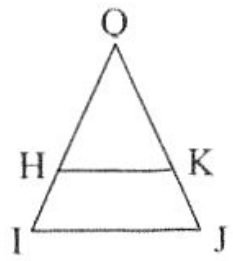
Xét hình thang IJKH, hạ đường cao KP, ta có:

$$KP = \sqrt{JK^2 - PJ^2} = \sqrt{JK^2 - \left(\frac{IJ - HK}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{51}}{2}.$$

$$S_{IJKH} = \frac{1}{2}(IJ + HK).KP = \frac{1}{2}(3a + 2a).\frac{a\sqrt{51}}{2} = \frac{5a^2\sqrt{51}}{4}.$$

☞ ***Nhận xét***: Trong lời giải câu b), vì thiết diện IJKH là hình thang cân nên việc tính diện tích của nó khá đơn giản.

Trong nhận xét này, chúng ta cùng xem xét một đề xuất khác để tính được diện tích thiết diện và nó đặc biệt có ích trong trường hợp thiết diện là những đa giác không có dạng đặc thù.



Kéo dài IH và JK, chúng cắt nhau tại Q.

Khi đó $S_{IJKH} = S_{\Delta QIJ} - S_{\Delta QHK}$.

Ví dụ 3: *Cho hình chóp* S.ABCD, *đáy* ABCD *là hình vuông cạnh bằng* a, *mặt bên* SAB *là tam giác đều. Cho* $SC = SD = a\sqrt{3}$. *Gọi* H, K *lần lượt là trung điểm của* SA, SB. M *là một điểm trên cạnh* AD. *Mặt phẳng* (HKM) *cắt* BC *tại* N.

a. *Chứng minh* HKMN *là hình thang cân.*

b. *Đặt* $AM = x$ $(0 \le x \le a)$, *tính diện tích của tứ giác* HKMN *theo* a, x. *Tính* x *để diện tích này nhỏ nhất.*

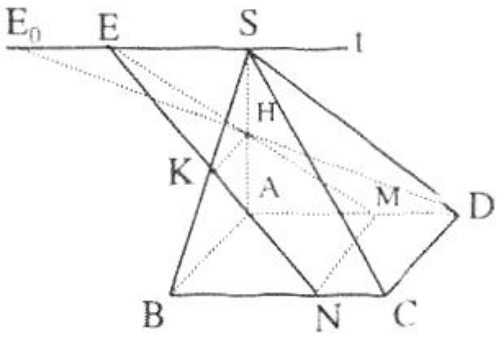
c. *Tìm tập hợp giao điểm của* HM *và* KN; *của* HN *và* KM.

Giải

a. Ta có:

$$\begin{cases} KH \in (MNKH) \text{ và } AB \in (ABCD) \\ KH // AB \\ (MNKH) \cap (ABCD) = MN \end{cases}$$

$\Rightarrow MN // AB // KH.$ (1)



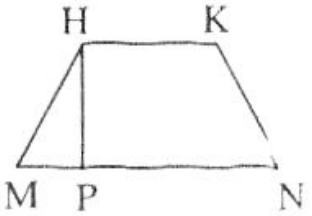
Mặt khác, ta lại có:

$\Delta SAD = \Delta SBC$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{SAD} = \widehat{SBC}$

$\Rightarrow \Delta HAM = \Delta KBN$ (c.g.c)

$\Rightarrow MH = NK.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra MNKH là hình thang cân.



b. Ta có ngay $MN = a$ và $KH = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$.

Trong ΔSAD, ta có:

$$\cos\widehat{SAD} = \frac{SA^2 + AD^2 - SD^2}{2SA.AD} = \frac{a^2 + a^2 - 3a^2}{2a^2} = -\frac{1}{2}.$$

Trong ΔHAM, ta có:

$$MH^2 = AH^2 + AM^2 - 2AH.AM.\cos\widehat{HAM}$$

$$= \frac{a^2}{4} + x^2 - 2.\frac{a}{2}.x.(-\frac{1}{2}) = \frac{a^2}{4} + x^2 + \frac{ax}{2}$$

$$\Rightarrow MH = \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + 2ax + a^2}.$$

Trong hình thang cân MNKH, gọi P là chân đường cao hạ từ H, ta có:

$$HP = \sqrt{MH^2 - MP^2}$$

$$= \sqrt{MH^2 - \left(\frac{MN - HK}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{16x^2 - 8ax + 3a^2}.$$

$$S_{MNKH} = \frac{1}{2}(MN + KH)HP = \frac{1}{2}(a + \frac{a}{2}).\frac{1}{4}\sqrt{16x^2 - 8ax + 3a^2}$$

$$= \frac{3a}{16}\sqrt{16x^2 - 8ax + 3a^2}.$$

Ta có biến đổi:

$$S_{MNKH} = \frac{3a}{16}\sqrt{(4x - a)^2 + 2a^2} \geq \frac{3a^2\sqrt{2}}{16}.$$

Vậy, ta được $(S_{MNKH})_{Min} = \frac{3a^2\sqrt{2}}{16}$ đạt được khi $x = \frac{a}{4}$.

c. *Hướng dẫn:* Quĩ tích là đoạn SE_0 trên St // AD.

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài tập 1. Cho hai đường thẳng (a) và (b) chéo nhau. Có hay không hai đường thẳng (p) và (q) song song với nhau, mỗi đường thẳng đều cắt cả (a) và (b).

Bài tập 2. Qua điểm M không thuộc đường thẳng (a) kẻ đường thẳng (b) song song với (a). Chứng minh rằng (b) $\subset$ (M, a).

Bài tập 3. Cho đường thẳng (a) nằm trong mặt phẳng (α) và một đường thẳng (b) cắt (α) tại điểm O. Chứng minh rằng nếu điểm O không thuộc (a) thì (a) và (b) chéo nhau.

Bài tập 4. Chứng minh rằng có vô số đường thẳng cắt cả 3 đường thẳng cho trước đôi một chéo nhau.

Bài tập 5. Cho tứ diện ABCD. Các điểm P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD; điểm R nằm trên cạnh BC sao cho BR = 2RC. Gọi S là giao điểm của mặt phẳng (PQR) và cạnh AD. Chứng minh rằng AS = 2SD.

Bài tập 6. Cho tứ diện ABCD. Bốn điểm P, Q, R, S lần lượt nằm trên bốn cạnh AB, BC, CD, DA và không trùng với các đỉnh của tứ diện. Chứng minh rằng:

a. Bốn điểm P, Q, R, S đồng phẳng khi và chỉ khi ba đường thẳng PQ, RS, AC hoặc đôi một song song hoặc đồng quy.

b. Bốn điểm P, Q, R, S đồng phẳng khi và chỉ khi ba đường thẳng PQ, RS, BP hoặc đôi một song song hoặc đồng quy.

Bài tập 7. Cho ΔABC nằm trong mặt phẳng (α). Gọi Bx, Cy là hai nửa đường thẳng song song và nằm về cùng một phía đối với (α). M và N là hai điểm di động lần lượt trên Bx, Cy sao cho CN = 2BM.

a. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định I khi M, N di động.

b. E thuộc đoạn AM và 3EM = EA, IE cắt AN tại F. Gọi Q là giao điểm của BE và CF. Chứng minh rằng AQ song song với Bx và Cy và (QMN) chứa một đường thẳng cố định khi M, N di động.

Bài tập 8. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q là các điểm lần lượt trên BC, SC, SD, AD sao cho MN song song với BS, NP song song với CD, MQ song song với CD.

a. Chứng minh rằng PQ song song với SA.

b. Gọi K là giao điểm của MN và PQ. Chứng minh rằng điểm K nằm trên một đường thẳng cố định khi M di động trên BC.

c. Qua Q dựng các đường thẳng Qx song song với SC và Qy song song với SB. Tìm giao điểm của Qx với (SAB) và của Qy với (SCD).

Bài tập 9. Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình bình hành. Trên đoạn SA lấy điểm M sao cho 2SM = MA, trên đoạn SB lấy điểm N sao cho 2SN = NB.

a. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

b. Chứng minh rằng MN song song với CD.

c. Điểm P nằm trên cạnh SC không trùng với S. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (SCD).

Bài tập 10. Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình thang, các cạnh đáy AD = a, BC = b. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các ΔSAD, ΔSBC.

a. Tìm giao tuyến của (SAD) với (SBC).

b. Tìm giao tuyến của (BCI) với (SAD).

c. Tìm giao tuyến của (ADJ) với (SBC).

d. Tìm độ dài đoạn giao tuyến của hai mặt phẳng (ADJ) và (BCI) giới hạn bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

Bài tập 11. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình thang với các cạnh đáy là AB, CD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC và G là trọng tâm ΔSAB.

a. Tìm giao tuyến của (SAB) và (IJG).

b. Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (IJG). Thiết diện là hình gì? Tìm điều kiện đối với AB và CD để thiết diện là hình bình hành.

Bài tập 12. Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O. Mặt bên (SAB) là tam giác đều. Ngoài ra $S\hat{A}D = 90^0$. Gọi Dx là đường thẳng qua D song song với SC.

a. Tìm giao điểm I của Dx với mặt phẳng (SAB). Chứng minh AI song song với SB.

b. Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (ACI). Tính diện tích của thiết diện.

Bài tập 13. Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình bình hành. I, J lần lượt là trung điểm của SB, AB. M là một điểm bất kỳ trên nửa đường thẳng Ax chứa C. Biện luận theo vị trí của điểm M trên Ax các dạng của thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (IJM).

CHỦ ĐỀ 3 # ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Cho đường thẳng (a) và mặt phẳng (P). Căn cứ vào số điểm chung của đường thẳng và mặt phẳng ta có ba trường hợp sau:

a. Đường thẳng (a) và mặt phẳng (P) không có điểm chung, tức là:

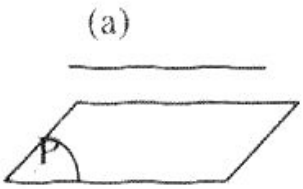
$$(a) \cap (P) = \varnothing \Leftrightarrow (a) \,//\, (P).$$

b. Đường thẳng (a) và mặt phẳng (P) chỉ có một điểm chung, tức là:

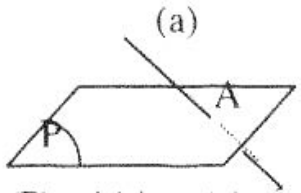
$$(a) \cap (P) = \{A\} \Leftrightarrow (a) \text{ cắt } (P) \text{ tại } A.$$

c. Đường thẳng (a) và mặt phẳng (P) có 2 điểm chung phân biệt, tức là:

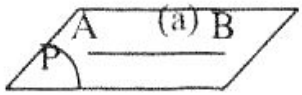
$$(a) \cap (P) = \{A, B\} \Leftrightarrow (a) \subset (P).$$



$(a) \cap (P) = \varnothing \Leftrightarrow (a) \,//\, (P)$



$(a) \cap (P) = \{A\} \Leftrightarrow (a)$ cắt (P)



$(a) \cap (P) = \{A, B\} \Leftrightarrow (a) \subset (P)$

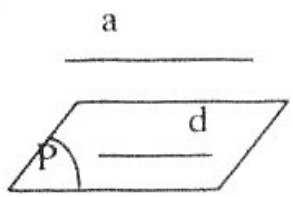
Định nghĩa: *Một đường thẳng và một mặt phẳng gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.*

2. ĐIỀU KIỆN ĐỂ MỘT ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MỘT MẶT PHẲNG

Định lí 1: *Nếu đường thẳng (a) không nằm trong mặt phẳng (P) và song song với một đường thẳng nào đó trong (P) thì (a) song song với (P).*

Tức là, với $(a) \not\subset (P)$ thì nếu:

$$(a) \,//\, d \subset (P) \Rightarrow (a) \,//\, (P).$$

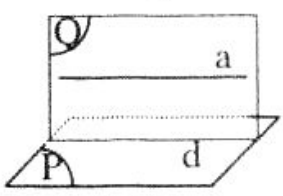


3. TÍNH CHẤT

Định lí 2: *Nếu đường thẳng (a) song song với mặt phẳng (P) thì mọi mặt phẳng (Q) chứa (a) mà cắt (P) thì sẽ cắt theo một giao tuyến song song với (a).*

Tức là, nếu:

$$\begin{cases} (a) \,//\, (P) \\ (a) \subset (Q) \cap (P) = (d) \end{cases} \Rightarrow (a) \,//\, (d).$$

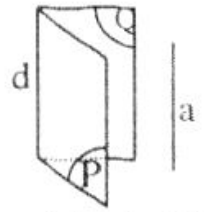


Hệ quả 1: *Nếu một đường thẳng song song với một mặt phẳng thì nó song song với một đường thẳng nào đó trong mặt phẳng.*

Hệ quả 2: *Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến (nếu có) của chúng song song với đường thẳng đó.*

Tức là:

$$\begin{cases} (P) \cap (Q) = (d) \\ (P) // (a) \\ (Q) // (a) \end{cases} \Rightarrow (d) // (a).$$



Định lí 3: *Nếu* (a) *và* (b) *là hai đường thẳng chéo nhau thì qua* (a) *có một và chỉ một mặt phẳng song song với* (b).

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

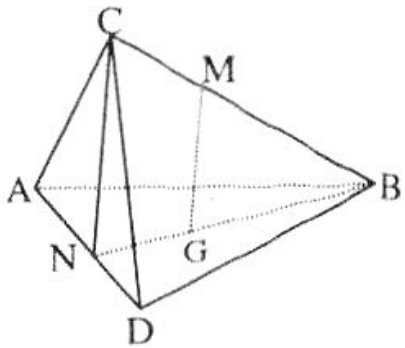
Vấn đề 1: CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG

Phương pháp áp dụng

Để chứng minh đường thẳng (d) song song với mặt phẳng (P) ta chứng minh (d) không nằm trong (P) và song song với một đường thẳng (a) chứa trong (P).

☞ ***Chú ý***: Nếu (a) không có sẵn thì ta chọn một mặt phẳng (Q) chứa (d) và nhận (a) làm giao tuyến của (P) và (Q).

Ví dụ 1: *Cho tứ diện* ABCD. *Gọi* G *là trọng tâm* ΔABD *và* M *là một điểm trên cạnh* BC *sao cho* MB = 2MC. *Chứng minh* MG *song song với mặt phẳng* (ACD).



✍ *Giải*

Gọi N là trung điểm AD, khi đó:

$$\frac{BG}{GN} = 2 = \frac{BM}{MC}$$

$\Rightarrow$ MG // CN $\subset$ (ACD)

$\Rightarrow$ MG // (ACD).

Ví dụ 2: *Cho hai hình bình hành* ABCD *và* ABEF *không cùng nằm trong một mặt phẳng.*

a. *Gọi* O *và* O' *lần lượt là tâm của* ABCD *và* ABEF. *Chứng minh* OO' *song song với các mặt phẳng* (ADF) *và* (BCE).

b. M, N *theo thứ tự là trọng tâm của các tam giác* ABD *và* ABF. *Chứng minh* MN *song song với* (CDEF).

ABC

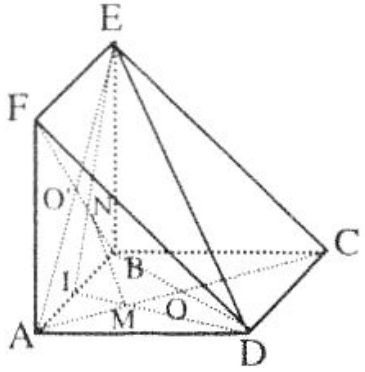
Giải

a. Trong ΔBDF có OO' là đường trung bình nên:

$OO' // DF \subset (ADF) \Rightarrow OO' // (ADF)$.

Trong ΔACE có OO' là đường trung bình nên:

$OO' // CE \subset (BCE) \Rightarrow OO' // (BCE)$.



b. Gọi I là trung điểm của AB, ta có:

$$\frac{IM}{ID} = \frac{IN}{IE} = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow MN // DF \subset (CEF) \Rightarrow MN // (CEF)$.

Ví dụ 3: *Cho tứ diện* ABCD. *Gọi* G_1 *và* G_2 *theo thứ tự là trọng tâm* ΔABD *và* ΔACD. *Chứng minh* G_1G_2 *song song với các mặt phẳng* (ABC) *và* (BCD).

Giải

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

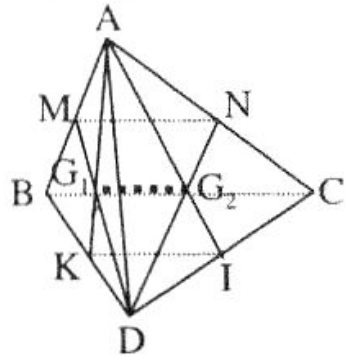
Cách 1: Gọi M, N, I, K theo thứ tự là trung điểm của AB, AC, CD, BD.

Trong ΔABD, ta có ngay:

$$\frac{AG_1}{AK} = \frac{2}{3} \text{ và } \frac{DG_1}{DM} = \frac{2}{3}.$$

Trong ΔACD, ta có ngay:

$$\frac{AG_2}{AI} = \frac{2}{3} \text{ và } \frac{DG_2}{DN} = \frac{2}{3}.$$



Từ đó, ta lần lượt có:

$$\frac{AG_1}{AK} = \frac{AG_2}{AI} = \frac{2}{3} \Rightarrow G_1G_2 // KI \subset (BCD) \Rightarrow G_1G_2 // (BCD).$$

$$\frac{DG_1}{DM} = \frac{DG_2}{DN} = \frac{2}{3} \Rightarrow G_1G_2 // MN \subset (ABC) \Rightarrow G_1G_2 // (ABC).$$

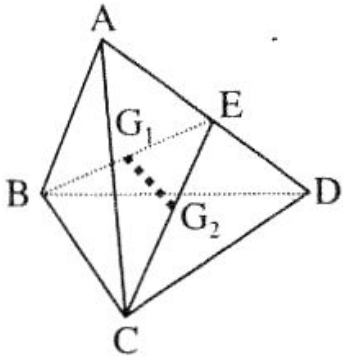
Cách 2: Gọi E là trung điểm của AD.

Trong ΔABD, ta có ngay:

$$\frac{BG_1}{BE} = \frac{2}{3}.$$

Trong ΔACD, ta có ngay:

$$\frac{CG_2}{CE} = \frac{2}{3}.$$



Từ đó, ta có:

$$\frac{BG_1}{BE} = \frac{CG_2}{CE} = \frac{2}{3} \Rightarrow G_1G_2 // BC$$

Vì BC thuộc (BCD) và (ABC) nên $G_1G_2 // (BCD)$ và $G_1G_2 // (ABC)$.

Ví dụ 4: *Cho chóp* S.ABCD *có đáy* ABCD *là hình bình hành. Gọi* M, N *lần lượt là trung điểm các cạnh* AB, CD. *Gọi* P *là trung điểm của* SA.

a. *Chứng minh* MN *song song với các mặt phẳng* (SBC) *và* (SAD).

b. *Chứng minh rằng* SB *song song với* (MNP).

c. *Chứng minh rằng* SC *song song với* (MNP).

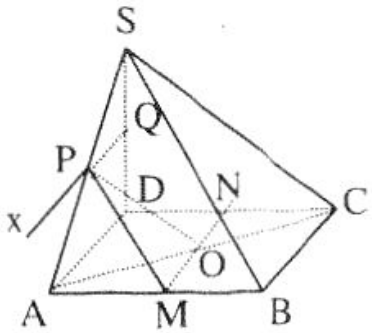
d. *Gọi* G_1 *và* G_2 *theo thứ tự là trọng tâm* ΔABC *và* ΔSBC. *Chứng minh* G_1G_2 *song song với* (SAD).

✍ *Giải*

a. Trong hình bình hành ABCD, ta có MN là đường trung bình, do đó:

$MN // BC \subset (SBC) \Rightarrow MN // (SBC)$.

$MN // AD \subset (SAD) \Rightarrow MN // (SAD)$.



b. Trong ΔSAB, ta có MP là đường trung bình, do đó:

$SB // MP \subset (MNP) \Rightarrow SB // (MNP)$.

c. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$\begin{cases} AD \in (SAD) \text{ và } MN \in (MNP) \\ AD // MN \\ (SAD) \cap (MNP) = Px \end{cases} \Rightarrow Kx // AD // MN.$$

Giả sử Px cắt SD tại Q, suy ra Q là trung điểm của SD.

Trong ΔSCD, ta có NQ là đường trung bình, do đó:

$SC // NQ \subset (MNP) \Rightarrow SC // (MNP)$.

Cách 2: Gọi O là trung điểm MN, suy ra O là trung điểm AC.

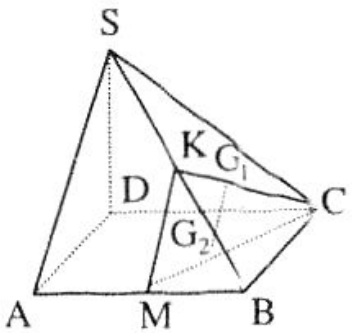
Trong ΔSAC, ta có OP là đường trung bình, do đó:

$SC // OP \subset (MNP) \Rightarrow SC // (MNP)$.

d. Gọi K là trung điểm của SB. Ta có:

$$\frac{CG_1}{CK} = \frac{2}{3} \text{ và } \frac{CG_2}{CM} = \frac{2}{3}$$

$\Rightarrow G_1G_2 // MK$. (1)



Mặt khác, trong ΔSAB, ta có MK là đường trung bình, do đó:

$MK // SA$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

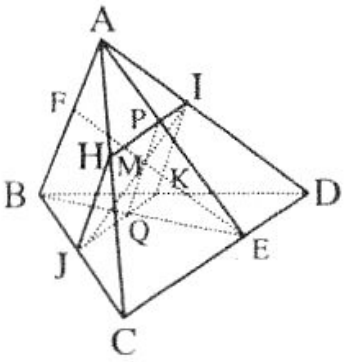
$G_1G_2 // SA \subset (SAD) \Rightarrow G_1G_2 // (SAD)$.

Ví dụ 5: *Cho tứ diện* ABCD. *Gọi* I, J *là hai điểm di động lần lượt trên các cạnh* AD, BC *sao cho luôn có* $\frac{IA}{ID} = \frac{JB}{JC}$.

a. *Chứng minh rằng* IJ *luôn song song với một mặt phẳng cố định.*

b. *Tìm tập hợp điểm* M *chia đoạn* IJ *theo tỉ số* k *cho trước (tức điểm* M *thoả* $\vec{IM} = k.\vec{MJ}$).

Giải



a. Dựng JH // AB, H ∈ AC. (1)

Nhận xét rằng:

$$\frac{HA}{HC} = \frac{JB}{JC} = \frac{IA}{ID} \Rightarrow HI // CD. \quad (2)$$

Gọi (α) là mặt phẳng chứa AB và song song với CD, suy ra (α) là mặt phẳng cố định và (HIJ) // (α).

b. Giải sử (HIJ) cắt BD tại K, dễ thấy HIKJ là hình bình hành. Qua M kẻ PQ song song với AB (P ∈ HI và Q ∈ JK). Ta có:

AP ∩ BQ = E và EM ∩ AB = F.

Nhận xét rằng:

$$\frac{ED}{EC} = \frac{PI}{PH} = \frac{MI}{MJ} = k \Rightarrow E \text{ là điểm chia CD theo tỉ số k.}$$

$$\frac{FA}{FB} = \frac{MP}{MQ} = \frac{MI}{MJ} = k \Rightarrow F \text{ là điểm chia AB theo tỉ số k.}$$

Vậy, tập hợp điểm M chia đoạn IJ theo tỉ số k là đoạn EF với E, F lần lượt là điểm chia CD và AB theo tỉ số k.

Vấn đề 2: TÌM GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT PHẲNG THIẾT DIỆN SONG SONG VỚI MỘT ĐƯỜNG THẲNG CHO TRƯỚC

Phương pháp áp dụng

1. Tìm phương giao tuyến bằng định lí 2 hoặc định lí 3.
2. Từ đó xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng song song với một hoặc hai đường thẳng cho trước theo phương pháp đã biết.

Ví dụ 1: *Cho mặt phẳng* (P) *và hai đường thẳng song song* (a), (b). *Chứng tỏ rằng nếu* (P) *cắt* (a) *thì* (P) *cũng cắt* (b).

Giải

Vì (a) song song với (b) nên (a) và (b) đồng phẳng.

Giả sử:

(a) ∩ (P) = {M} ⇒ (a, b) ∩ (P) = Mx.

Trong mặt phẳng (a, b) vì (a) song song với (b) và (a) cắt Mx tại M nên (b) cũng sẽ cắt Mx tại N.

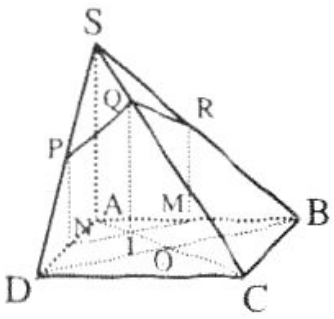
Vậy, ta được (b) $\cap$ (P) = {N}.

☞ ***Nhận xét***: Trong lời giải trên, chúng ta đã sử dụng kết quả của tính chất thừa nhận 5 (*Trong mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết của hình học phẳng đều đúng*), cụ thể *"Trong mặt phẳng cho (a) //(b) thì nếu (c) cắt (a) cũng sẽ cắt (b)"*.

Ví dụ 2: (Bài 28/tr 60 – Sgk): *Cho hình chóp* S.ABCD *có đáy là hình bình hành. Xác định thiết diện hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng đi qua trung điểm* M *của cạnh* AB, *song song với* BD *và* SA.

✍ *Giải*

Thiết diện được xác định bằng cách:



- Trong mặt phẳng (ABCD) kẻ Mx song song với BD, Mx cắt AC và AD theo thứ tự tại I và N.
- Trong mặt phẳng (SAB) kẻ My song song với SA, My cắt SB tại R.
- Trong mặt phẳng (SAC) kẻ Iz song song với SA, Iz cắt SC tại Q.
- Trong mặt phẳng (SAD) kẻ Nt song song với SA, Nt cắt SD tại P.

Khi đó, ngũ giác MNPQR là thiết diện cần dựng.

Ví dụ 3: (Bài 26/tr 59 – Sgk): *Cho tứ diện* ABCD. *Có thể hay không cắt tứ diện bằng một mặt phẳng để*:

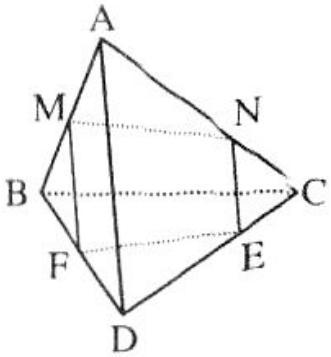
a. *Thiết diện là hình thang*?

b. *Thiết diện là hình bình hành*?

c. *Thiết diện là hình thoi*?

✍ *Giải*

a. Thiết diện có thể là hình thang, cụ thể nếu mặt phẳng chứa MN (với M $\in$ AB và N $\in$ AC) và song song với AD.



Khi đó, thiết diện được xác định như sau:

- Trong (ABD) kẻ Mx song song với AD và cắt BD tại F.
- Trong (ACD) kẻ Ny song song với AD và cắt BD tại F.

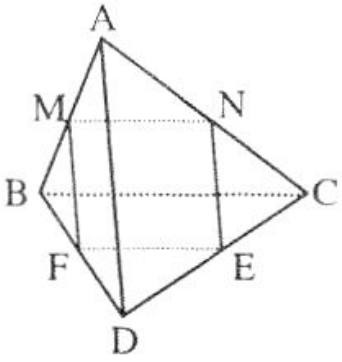
Từ đó, suy ra:

NE // MF $\Rightarrow$ MNEF là hình thang.

b. Thiết diện có thể là hình bình hành, cụ thể nếu mặt phẳng đi M (với M $\in$ AB) song song với AD và BC.

Khi đó, thiết diện được xác định như sau:

- Trong (ABC) kẻ Mt song song với BC và cắt AC tại N.
- Trong (ABD) kẻ Mx song song với AD và cắt BD tại F.
- Trong (ACD) kẻ Ny song song với AD và cắt CD tại E.



Khi đó, từ cách dựng ta suy ra MF // NE. (1)

Mặt khác, ba mặt phẳng (MNEF), (ABC) và (BCD) cắt nhau theo ba giao tuyến MN, BC, EF và MN // BC nên MN // EF. (2)

Từ (1) và (2) suy ra thiết diện MNEF là hình bình hành.

c. Thiết diện có thể là hình thoi, cụ thể với thiết diện được dựng như trong câu b). Khi đó, để MNEF là hình thoi điều kiện là:

$$MN = MF. \qquad (*)$$

Ta có:

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow MN = \frac{AM.BC}{AB}. \qquad (3)$$

$$\frac{MF}{AD} = \frac{BM}{AB} \Rightarrow MF = \frac{AD.BM}{AB}. \qquad (4)$$

Khi đó, điều kiện (*) trở thành:

$$\frac{AM.BC}{AB} = \frac{AD.BM}{AB} \Leftrightarrow \frac{AM}{BM} = \frac{AD}{BC}.$$

Vậy, mặt phẳng (P) đi qua điểm M (với $M \in AB$ sao cho $\frac{AM}{BM} = \frac{\cdot AD}{BC}$) song song với AD và BC sẽ cắt tứ diện theo một thiết diện là hình thoi.

Ví dụ 4: *Cho hình chóp* S.ABCD *đáy* ABCD *là hình thang có đáy lớn* BC = 2a, AD = a, AB = b. *Mặt bên* SAD *là tam giác đều.* (α) *là mặt phẳng qua điểm* M *trên cạnh* AB *và song song với* SA *và* BC, (α) *cắt* CD, SC, SB *lần lượt tại* N, P, Q.

a. *Chứng minh* MNPQ *là hình thang cân.*

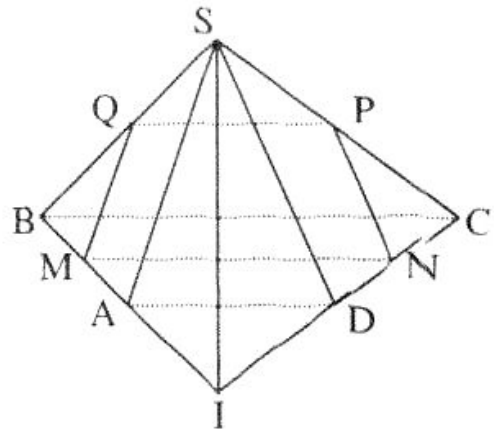
b. *Tính diện tích thiết diện theo* a, (b) *và* x = AM, (0 < x < b). *Tính giá trị lớn nhất của diện tích.*

Giải

a. Ta lần lượt có:

$$\begin{cases} SA // (\alpha) \\ SA \subset (SAB) \\ MQ \in (SAB) \cap (\alpha) \end{cases} \Rightarrow MQ // SA.$$

$$\begin{cases} BC // (\alpha) \\ MN \in (ABCD) \cap (\alpha) \\ PQ \in (SBC) \cap (\alpha) \end{cases} \Rightarrow MN // PQ // BC.$$



Nhận xét rằng:

$$\frac{MQ}{SA} = \frac{BM}{BA} = \frac{BQ}{BS} = \frac{CN}{CD} = \frac{CP}{CS} = \frac{NP}{SD}$$

$$\overset{SA=SD}{\Rightarrow} MQ = NP.$$

Vậy, thiết diện MNPQ là hình thang cân.

b. Giả sử AB cắt CD tại I, ta có:

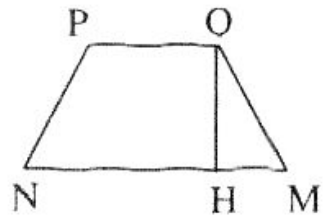
$$AD \overset{//}{=} \frac{1}{2}BC \Rightarrow AD \text{ là đường trung bình của } \Delta IBC$$

Do đó IA = AB = b và:

$$\frac{MN}{BC} = \frac{IM}{IB} = \frac{IA + AM}{IA + AB} = \frac{b + x}{2b} \Rightarrow MN = \frac{a(b + x)}{b}.$$

Trong ΔSBC, ta có:

$$\frac{PQ}{BC} = \frac{SQ}{SB} = \frac{AM}{AB} = \frac{x}{b} \Rightarrow PQ = \frac{2ax}{b}.$$



Trong ΔSAB, ta có:

$$\frac{MQ}{SA} = \frac{BM}{AB} = \frac{b - x}{b} \Rightarrow MQ = \frac{a(b - x)}{b}.$$

Xét hình thang cân MNPQ, hạ đường cao QH, ta có:

$$QH = \sqrt{MQ^2 - MH^2} = \sqrt{MQ^2 - \left(\frac{MN - PQ}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}a(b - x)}{2b}.$$

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MN + PQ).QH = \frac{\sqrt{3}a^2}{4b^2}(b + 3x)(b - x).$$

Ta biến đổi:

$$S_{MNPQ} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4b^2}.\left[\frac{4b^2}{3} - \left(x\sqrt{3} - \frac{b}{\sqrt{3}}\right)^2\right] \le \frac{\sqrt{3}a^2}{4b^2}.\frac{4b^2}{3} = \frac{a^2}{\sqrt{3}}.$$

Vậy $(S_{MNPQ})_{Max} = \frac{a^2}{\sqrt{3}}$, đạt được khi $x\sqrt{3} - \frac{b}{\sqrt{3}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{b}{3}$.

Ví dụ 5: *Cho hình chóp* S.ABC. *Gọi* K *và* N *lần lượt là trung điểm của* SA *và* BC, M *là điểm nằm giữa* S *và* C.

a. *Chứng minh rằng mặt phẳng đi qua* K, *song song với* AB *và* SC *thì đi qua điểm* N.

b. *Xác định thiết diện của hình chóp* S.ABC *khi cắt bởi mặt phẳng* (KMN). *Chứng tỏ rằng* KN *chia thiết diện thành hai phần có diện tích bằng nhau.*

ABC

Giải

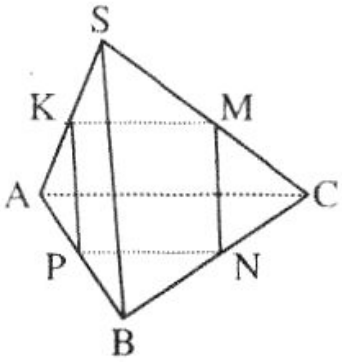
a. Gọi (P) là mặt phẳng qua K, song song với AB và SC, ta có:

- Mặt phẳng (Q) chứa AB và song song với SC.
- Mặt phẳng (R) chứa SC và song song với AB.

Khi đó, ba mặt phẳng (P), (Q), (R) song song với nhau sẽ chắn trên hai cát tuyến BC và SA các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ, cụ thể:

$$\frac{BN}{AK}=\frac{CN}{SK}=\frac{BC}{AS}\Rightarrow\frac{BN}{CN}=\frac{AK}{SK}=1$$

$\Rightarrow BN = CN \Rightarrow$ N là trung điểm của BC.



b. Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu M là trung điểm của SC thì thiết diện là hình bình hành MNPK với P là trung điểm của AB. Và hiển nhiên khi đó KN chia thiết diện thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Trường hợp 2: Nếu M không trùng với trung điểm SC thì ta thực hiện:

- Nối KM cắt AC tại D.
- Nối ND cắt AB tại P.

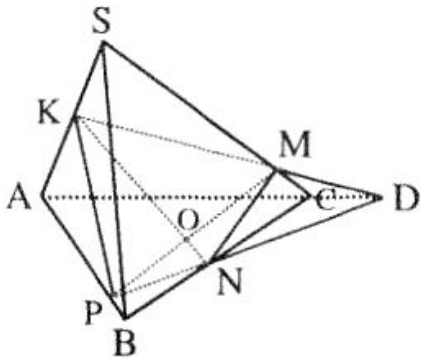
Khi đó, tứ giác MNPK là thiết diện cần dựng.

Gọi $\{O\} = KN \cap MP$, nhận xét rằng:

$d(M, (P)) = d(S, (P))$,

$d(P, (P)) = d(A, (P))$,

$d(S, (P)) = d(A, (P))$,



Suy ra:

$d(P, (P)) = d(M, (P)) \Rightarrow OP = OM$

Do đó KN chia thiết diện thành hai phần có diện tích bằng nhau.

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài tập 1. Cho hai đường thẳng phân biệt a, (b) và mặt phẳng α.

a. Giả sử (a) // (b) và (b) // (α), có thể kết luận gì về vị trí tương đối của (a) với (α).

b. Giả sử (a) // (α) và (b) // (α), có thể kết luận gì về vị trí tương đối của (a) với (b).

Bài tập 2. Giả sử đường thẳng (a) song song với mặt phẳng (P). Hãy nêu phương pháp để xác định được một đường thẳng (b) thuộc (P) và song song với (a).

Bài tập 3. Cho tứ diện ABCD. Gọi O, O' lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC và ABD. Chứng minh rằng:

a. Điều kiện cần và đủ để OO' song song với (BCD) là:

$$\frac{BC}{BD}=\frac{AB+AC}{AB+AD}.$$

b. Điều kiện cần và đủ để OO' song song với 2 mặt phẳng (BCD) và (ACD) là BC = BD và AC = AD.

Bài tập 4. Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình bình hành tâm O. M là một điểm di động trên SC, (α) là mặt phẳng qua AM và song song với BD.

a. Chứng minh (α) luôn chứa một đường thẳng cố định.

b. Tìm các giao điểm H và K của (a) với SB, SD. Chứng minh rằng $\frac{SB}{SH}+\frac{SD}{SK}-\frac{SC}{SM}$ có giá trị không đổi.

c. Thiết diện của hình chóp với (α) có thể là hình thang được không?

Bài tập 5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là tứ giác lồi, O là giao điểm của hai đường chéo AC và BC. Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng qua O, song song với AB và SC. Hỏi thiết diện đó là hình gì?

Bài tập 6. Cho hình chóp S.ABCD. M, N là hai điểm bất kì trên SB và CD. (α) là mặt phẳng qua MN và song song với SC.

a. Tìm các giao tuyến của (α) với các mặt phẳng (SBC), (SCD) và (SAC).

b. Xác định thiết diện của S.ABCD với mặt phẳng (α).

Bài tập 7. Cho tứ diện đều ABCD. Gọi E là điểm nằm trong ΔABC. Mặt phẳng (α) qua E song song với các đường thẳng AC và BD. Xác định thiết diện của ABCD với mặt phẳng (α). Thiết diện là hình gì?

Bài tập 8. Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình bình hành tâm O. M là trung điểm của SB. Xác định thiết diện của hình chóp S.ABCD cắt bởi mặt phẳng (α) trong 2 trường hợp sau:

a. (α) qua M và song song với SO và AD.

b. (α) qua O và song song với AM và SC.

Bài tập 9. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. M và P là 2 điểm di động trên các cạnh AD và BC, sao cho AM = CP = x, ($0 < x < a$). Một mặt phẳng qua MP và song song với CD cắt tứ diện theo một thiết diện.

a. Chứng minh thiết diện thông thường là hình thang cân.

b. Tính diện tích thiết diện theo (a) và x. Tìm x để diện tích thiết diện nhỏ nhất.

Bài tập 10. Cho tứ diện ABCD có AB = CD = a, BC = AD = b, AC = BD = c ($a > b > c$). Một mặt phẳng (α) song song với AB và CD, cắt tứ diện theo một thiết diện có chu vi p và diện tích s.

a. Định (α) để p lớn nhất, nhỏ nhất.

b. Định (α) để s lớn nhất. Tính diện tích ấy.

CHỦ ĐỀ 4 HAI MẶT PHẲNG SỌNG SONG

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG PHÂN BIỆT

Cho 2 mặt phẳng (P) và (Q). Căn cứ vào số đường thẳng chung của 2 mặt phẳng ta có ba trường hợp sau:

a. Hai mặt phẳng (P) và (Q) không có đường thẳng chung, tức là:

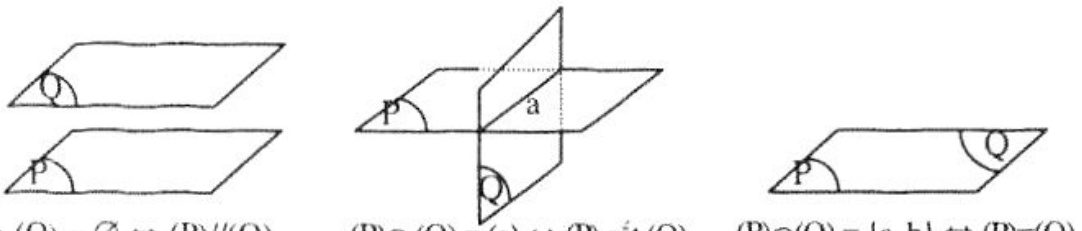
$$(P) \cap (Q) = \varnothing \Leftrightarrow (P) \,//\, (Q).$$

b. Hai mặt phẳng (P) và (Q) chỉ có một đường thẳng chung, tức là:

$$(P) \cap (Q) = (a) \Leftrightarrow (P) \text{ cắt } (Q).$$

c. Hai mặt phẳng (P) và (Q) có 2 đường thẳng chung phân biệt, tức là:

$$(P) \cap (Q) = \{a, b\} \Leftrightarrow (P) \equiv (Q).$$



$(P) \cap (Q) = \varnothing \Leftrightarrow (P)//(Q)$ $(P) \cap (Q) = (a) \Leftrightarrow (P)$ cắt (Q) $(P) \cap (Q) = \{a, b\} \Leftrightarrow (P) \equiv (Q)$

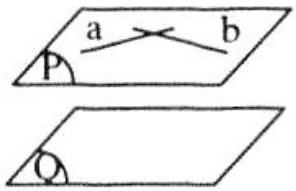
Định nghĩa: *Hai mặt phẳng gọi là song song nếu chúng không có điểm chung.*

2. ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

Định lí 1: *Nếu mặt phẳng* (P) *chứa hai đường thẳng* (a), (b) *cắt nhau và cùng song song với mặt phẳng* (Q) *thì* (P) *song song* (Q).

Tức là:

$$\begin{cases} (a),(b) \in (P) \\ (a) \text{ cắt } (b) \\ (a)//(Q) \text{ và } (b)//(Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \,//\, (Q).$$



3. TÍNH CHẤT

Tính chất 1: *Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng, có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.*

Tức là:

$$O \notin (P) \Rightarrow \exists!(Q): \begin{cases} O \in (Q) \\ (P)//(Q) \end{cases}.$$

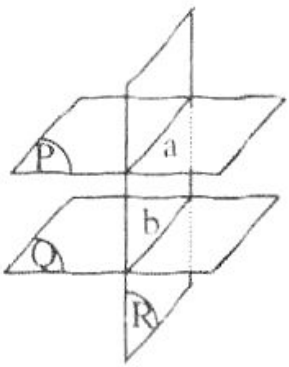
Cách dựng: Ta lần lượt thực hiện:

- Trong (P) dựng (a), (b) cắt nhau.
- Qua O dựng $(a_1) \,//\, (a)$, $(b_1) \,//\, (b)$.
- Mặt phẳng (a_1, b_1) là mặt phẳng qua O và song song với (P).

Hệ quả 1: *Nếu đường thẳng (a) song song với mặt phẳng (Q) thì qua (a) có một và chỉ một mặt phẳng (P) song song với (Q).*

Hệ quả 2: *Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.*

Tính chất 2: *Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song thì mọi mặt phẳng (R) đã cắt (P) thì phải cắt (Q) và các giao tuyến của chúng song song.*

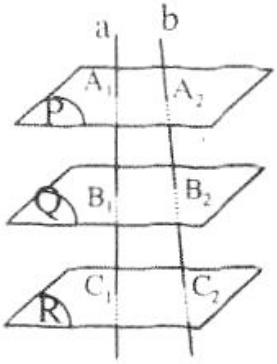


Tức là:

$$\begin{cases} (P)\,//\,(Q) \\ (a) = (P) \cap (R) \\ (b) = (Q) \cap (R) \end{cases} \Rightarrow (a)\,//\,b.$$

4. ĐỊNH LÍ TA–LÉT TRONG KHÔNG GIAN

Định lí 2 (Định lí Ta–lét): *Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì các đoạn thẳng tương ứng tỷ lệ.*



Tức là:

$$\begin{cases} (P)\,//\,(Q)\,//\,(R) \\ a \cap (P) = A_1 \text{ và } a \cap (Q) = B_1 \text{ và } a \cap (R) = C_1 \\ b \cap (P) = A_2 \text{ và } b \cap (Q) = B_2 \text{ và } b \cap (R) = C_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2}.$$

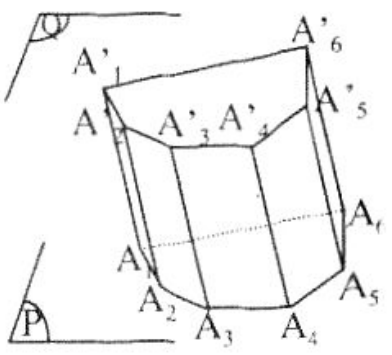
Định lí 3 (Định lí Ta–lét đảo): *Giả sử trên hai đường thẳng chéo nhau a_1 và a_2 lần lượt lấy các điểm A_1, B_1, C_1 và A_2, B_2, C_2 sao cho:*

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2}$$

Khi đó, ba đường thẳng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 lần lượt nằm trên ba mặt phẳng song song, tức là chúng cùng song song với một mặt phẳng.

5. HÌNH LĂNG TRỤ VÀ HÌNH HỘP

Định nghĩa hình lăng trụ: *Hình lăng trụ là một hình đa diện có hai mặt nằm trong hai mặt phẳng song song gọi là hai đáy và tất cả các cạnh không thuộc hai đáy đều song song với nhau.*



Trong đó:

- Các mặt khác với hai đáy gọi là các *mặt bên* của hình lăng trụ.
- Cạnh chung của hai mặt bên gọi là *cạnh bên* của hình lăng trụ.
- Tuỳ theo đa giác đáy, ta có hình lăng trụ tam giác, lăng trụ tứ giác,...

Từ định nghĩa của hình lăng trụ, ta lần lượt suy ra các tính chất sau:

a. Các cạnh bên song song và bằng nhau.

b. Các mặt bên và các mặt chéo là những hình bình hành.

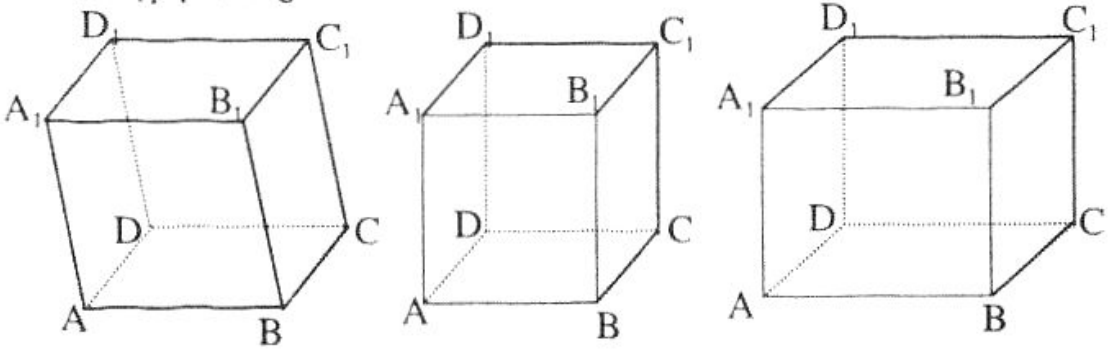
c. Hai đáy là hai đa giác có các cạnh tương ứng song song và bằng nhau.

Định nghĩa hình hộp: *Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành gọi là hình hộp.*

Từ định nghĩa của hình hộp, ta lần lượt suy ra các tính chất sau:

a. Hình hộp có tất cả các mặt bên và các mặt đáy đều là hình chữ nhật gọi là hình hộp chữ nhật.

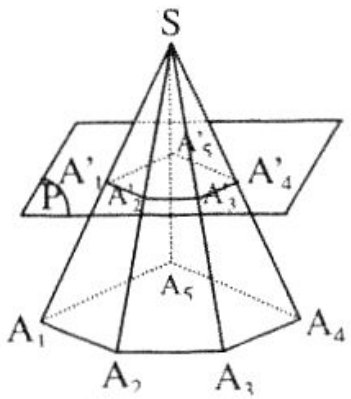
b. Hình hộp có tất cả các mặt bên và các mặt đáy đều là hình vuông gọi là hình lập phương.



Chú ý: Các đường chéo của hình hộp cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

6. HÌNH CHÓP CỤT

Định nghĩa: Cho hình chóp $SA_1A_2...A_n$. Một mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng chứa đa giác đáy cắt các cạnh SA_1, SA_2, ..., SA_n theo thứ tự tại A'_1, A'_2, ..., A'_n. Hình tạo bởi thiết diện $A'_1A'_2...A'_n$ và đáy $A_1A_2...A_n$ của hình chóp cùng với các mặt bên $A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_2$, ..., $A_nA_1A'_1A'_n$ gọi là một *hình chóp cụt*.



Trong đó:

- Đáy của hình chóp gọi là *đáy lớn* của hình chóp cụt, còn thiết diện gọi là *đáy nhỏ* của hình chóp cụt.
- Các mặt còn lại gọi là các *mặt bên* của hình chóp cụt.
- Cạnh chung của hai mặt bên kề nhau như $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, ...$A_nA'_n$ gọi là cạnh bên của hình chóp cụt.

Tuỳ theo đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác, .. ta có hình chóp cụt tam giác, hình chóp cụt tứ giác, hình chóp cụt ngũ giác, ...

Tính chất: Với hình chóp cụt, ta có các tính chất sau:

1. Hai đáy của hình chóp cụt là hai đa giác đồng dạng.
2. Các mặt bên của hình chóp cụt là các hình thang.
3. Cách cạnh bên của hình chóp cụt đồng quy tại một điểm.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: CHỨNG MINH HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

Phương pháp áp dụng

Để chứng minh 2 mặt phẳng song song ta đi chứng minh mặt phẳng này chứa hai đường thẳng cắt nhau song song với mặt phẳng kia (hoặc song song với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng kia).

☞ ***Chú ý***:

1. Sử dụng tính chất:

$$\begin{cases}(P)//(Q)\\(a)\subset(Q)\end{cases}\Rightarrow (a)\ //\ (P)$$

ta được thêm một phương pháp để chứng minh đường thẳng (a) song song với (P).

2. Sử dụng định lí Talét đảo ta được thêm một phương pháp để chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng, cụ thể:
Ba điểm A_1, B_1, C_1 thuộc đường thẳng (a) và ba điểm A_2, B_2, C_2 thuộc đường thẳng (b) (với (a) và (b) chéo nhau) thoả mãn:

$$\frac{A_1B_1}{B_1C_1}=\frac{A_2B_2}{B_2C_2}$$

suy ra tồn tại duy nhất bộ ba mặt phẳng (P), (Q), (R) song song lần lượt chứa các đoạn thẳng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, từ đó ta được các kết quả:
A_1A_2 song song với (Q) và (R).
B_1B_2 song song với (P) và (R).
C_1C_2 song song với (P) và (Q).
Điều quan trọng nhất cần chỉ ra được sự tồn tại của một trong ba mặt phẳng.

Ví dụ 1: *Cho hai hình vuông* ABCD *và* ABEF *ở trong 2 mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo* AC *và* BF *lần lượt lấy các điểm* M, N *sao cho* AM = BN. *Các đường thẳng song song với* AB *vẽ từ* M, N *lần lượt cắt* AD, AF *tại* M', N'.

a. *Chứng minh rằng* (CBE) *song song với* (ADF).
b. *Chứng minh rằng* (DEF) *song song với* (MNN'M').
c. *Gọi* I *là trung điểm của* MN, *tìm tập hợp điểm* I *khi* M, N *di động.*

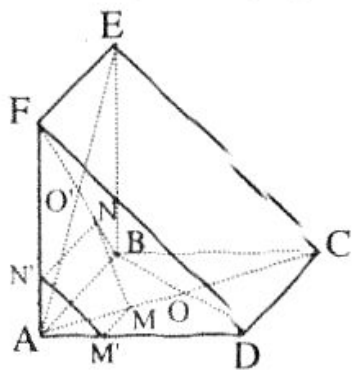
✍ *Giải*

a. Ta có nhận xét:

$$\begin{cases}BC\ //\ AD\\BE\ //\ AF\end{cases}\Rightarrow (BCE)\ //\ (ADF).$$

b. Ta có nhận xét:

$$\frac{AM'}{AD}=\frac{AM}{AC}=\frac{BN}{BF}=\frac{AN'}{AF}\Rightarrow M'N'\ //\ DF. \qquad (1)$$



Mặt khác, ta có MM' // CD. (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

(MNN'M') // (DEF).

c. I chạy trên trung tuyến của ΔADE kẻ từ A.

Ví dụ 2: (Mở rộng bài 33/tr 68 – Sgk): *Cho hình bình hành* ABCD. *Qua* A, B, C, D *lần lượt vẽ bốn nửa đường thẳng* Ax, By, Cz, Dt *ở cùng phía đối với mặt phẳng* (ABCD), *song song với nhau và không nằm trong mặt phẳng* (ABCD). *Một mặt phẳng* (β) *lần lượt cắt* Ax, By, Cz *và* Dt *tại* A', B', C' *và* D'.

a. *Chứng minh* (Ax, By) // (Cz, Dt).

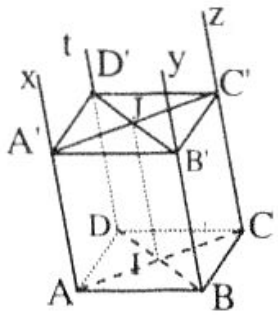
b. *Gọi* I = AC ∩ BD, J = A'C' ∩ B'D'. *Chứng minh* IJ // AA'.

c. *Cho* AA' = x, BB' = y, CC' = z. *Hãy tính* DD'.

Giải

a. Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} Ax // Cz \\ AB // CD \end{cases} \Rightarrow (Ax, By) // (Cz, Dt).$$



b. Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} (a,b) // (c,d) \\ (A'B'C'D') \cap (a,b) = A'B' \\ (A'B'C'D') \cap (c,d) = C'D' \end{cases} \Rightarrow A'B' // C'D'.$$

$$\begin{cases} (a,d) // (b,c) \\ (A'B'C'D') \cap (a,d) = A'D' \\ (A'B'C'D') \cap (b,c) = B'C' \end{cases} \Rightarrow A'D' // B'C'.$$

Từ đó, suy ra A'B'C'D' là hình bình hành.

Suy ra IJ là đường trung bình của hình thang AA'C'C, do đó IJ // AA'.

c. Từ kết quả câu b), ta có:

$$IJ = \frac{1}{2}(AA' + CC') = \frac{1}{2}(BB' + DD') \Rightarrow DD' = AA' + CC' - BB' = x + y - z.$$

Ví dụ 3: *Cho hình chóp* S.ABCD, *đáy* ABCD *là hình bình hành tâm* O. *Gọi* M, N *lần lượt là trung điểm của* SA *và* CD.

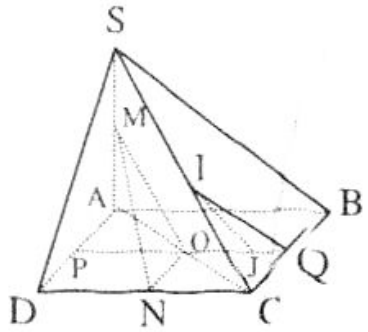
a. *Chứng minh rằng mặt phẳng* (OMN) *và mặt phẳng* (SBC) *song song với nhau.*

b. *Gọi* I *là trung điểm của* SC, J *là một điểm trên* (ABCD) *và cách đều* AB *và* CD. *Chứng minh* IJ *song song với* (SAB).

c. *Giả sử hai tam giác* SAD, ABC *đều cân tại* A. *Gọi* AE, AF *là các đường phân giác trong của các tam giác* ACD *và* SAB. *Chứng minh rằng* EF *song song với* (SAD).

ABC

✍ *Giải*



a. Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} OM // SC \\ ON // BC \end{cases} \Rightarrow (OMN) // (SBC).$$

b. Gọi P, Q theo thứ tự là trung điểm AD và BC, suy ra J thuộc đường thẳng PQ.

Nhận xét rằng:

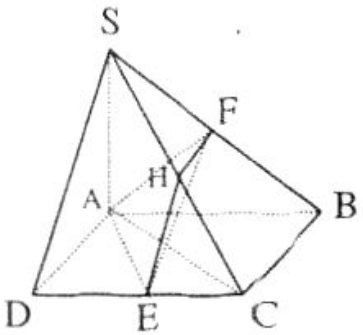
$$\begin{cases} PQ // AB \\ IQ // SB \end{cases} \Rightarrow (IPQ) // (SAB) \Rightarrow IJ // (SAB).$$

c. Sử dụng tính chất đường phân giác, ta có:

$$\frac{ED}{EC} = \frac{AD}{AC} = \frac{AS}{AB} = \frac{FS}{FB}$$

suy ra tồn tại duy nhất bộ ba mặt phẳng song song lần lượt chứa các đoạn thẳng SD, EF, CD và ta thấy ngay một trong ba mặt phẳng đó chính là (SAD), do đó:

$EF // (SAD)$.



☞ ***Chú ý***: Nếu các em học sinh cảm thấy khó hiểu trong lời giải của câu c) thì có thể sử dụng lời giải tường minh hơn như sau:

Dựng $EH // SD$, $H \in SC$. (1)

Nhận xét rằng:

$$\frac{HS}{HC} = \frac{ED}{EC} = \frac{AD}{AC} = \frac{AS}{AB} = \frac{FS}{FB} \Rightarrow HF // BC \Rightarrow HF // AD. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$(HEF) // (SAD) \Rightarrow EF // (SAD)$.

Vấn đề 2: TÌM GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT PHẲNG THIẾT DIỆN SONG SONG VỚI MỘT MẶT PHẲNG CHO TRƯỚC

Phương pháp áp dụng

1. Ta sử dụng thêm tính chất 2 để xác định giao tuyến của hai mặt phẳng.
2. Thiết diện của hình chóp cắt bởi một mặt phẳng song song với một mặt phẳng cho trước được xác định thông qua việc tìm được các đoạn giao tuyến như trên.

Ví dụ 1: (Bài 32/tr 68 – Sgk): Cho hai đường thẳng chéo nhau (a) và (b) lần lượt nằm trên hai mặt phẳng song song (P) và (Q). Chứng minh rằng nếu điểm M không nằm trên (P) và không nằm trên (Q) thì có duy nhất một đường thẳng đi qua M cắt cả (a) và (b).

Giải

Nhận xét rằng:

- Mặt phẳng (M, a) là duy nhất.
- Mặt phẳng (M, b) là duy nhất.
- Vì (M, a) ≠ (M, b) bởi (a) và (b) chéo nhau nên (M, a) ∩ (M, b) = Mx.

Khi đó:

- Mx không thể song song với (a) (vì nếu trái lại thì Mx và (b) sẽ chéo nhau – mâu thuẫn (Mx, b)) do đó Mx cắt (a).
- Mx không thể song song với (b) (vì nếu trái lại thì Mx và (a) sẽ chéo nhau – mâu thuẫn (Mx, a)) do đó Mx cắt (b).

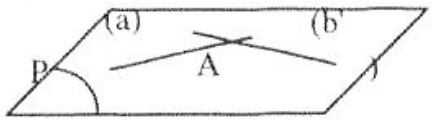
Vậy, có duy nhất một đường thẳng đi qua M cắt cả (a) và (b).

Ví dụ 2: (Bài 31/tr 68 – Sgk): *Cho hai đường thẳng chéo nhau. Chứng minh rằng có đúng hai mặt phẳng song song với nhau lần lượt đi qua hai đường thẳng đó.*

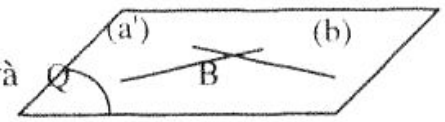
Giải

Với hai đường thẳng chéo nhau (a) và (b) thì theo định lí 3 của bài học 3:

- Có duy nhất một mặt phẳng (P) chứa (a) và song song với (b), nó được dựng bằng cách:
 - Từ điểm A thuộc (a) kẻ đường thẳng (b') song song với (b).
 - Khi đó (P) = (a, a').



- Có duy nhất một mặt phẳng (Q) chứa (b) và song song với (a), nó được dựng bằng cách:
 - Từ điểm B thuộc (b) kẻ đường thẳng (a') song song với (a).
 - Khi đó (Q) = (b, b').



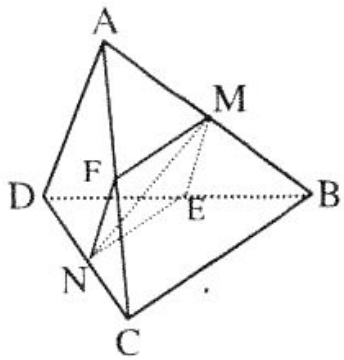
Theo định lí 1, ta có ngay (P) song song với (Q).

Ví dụ 3: (Bài 34/tr 68 – Sgk): *Cho tứ diện* ABCD. *Gọi* M *là trung điểm của* AB. *Hỏi mặt phẳng* (P) *qua điểm* M, *song song với cả* AD *và* BC *có đi qua trung điểm* N *của* CD *không? Tại sao?*

Giải

Mặt phẳng (P) có đi qua trung điểm N của CD, bởi:

- Mặt phẳng (Q) chứa AD và song song với BC.
- Mặt phẳng (R) chứa BC và song song với AD.



Khi đó, ba mặt phẳng (P), (Q), (R) song song với nhau sẽ chắn trên hai cắt tuyến AB và CD các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ, cụ thể:

$$\frac{AM}{DN} = \frac{BM}{CN} = \frac{AB}{DC} \Rightarrow \frac{DN}{CN} = \frac{AM}{BM} = 1$$

$\Rightarrow DN = CN \Rightarrow$ N là trung điểm của CD.

Ví dụ 4: *Cho hình chóp* S.ABCD *đáy* ABCD *là hình bình hành tâm* O *có* AC = a, BD = b. *Tam giác* SBD *là tam giác đều. Một mặt phẳng* (α) *di động song song với* (SBD) *và qua điểm* I *trên đoạn* AC.

a. *Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng* (α).

b. *Tính diện tích thiết diện theo* a, b *và* AI = x.

✍ *Giải – Bạn đọc tự vẽ hình.*

a. Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $I \in OA$ thì:

$$\begin{cases} (\alpha) // (SBD) \\ Ix = (\alpha) \cap (ABCD) \\ BD = (SBD) \cap (ABCD) \end{cases} \Rightarrow Ix // BD \text{ và } Ix \text{ cắt AB, AD theo thứ tự M và N.}$$

Lập luận tương tự ta cũng có:

- (α) cắt mặt phẳng (SAB) theo đoạn giao tuyến MP song song với SB.
- (α) cắt mặt phẳng (SAD) theo đoạn giao tuyến NP song song với SD.

Trường hợp 2: Nếu $I \in OC$ thì:

$$\begin{cases} (\alpha) // (SBD) \\ Ix = (\alpha) \cap (ABCD) \\ BD = (SBD) \cap (ABCD) \end{cases} \Rightarrow Ix // BD \text{ và } Ix \text{ cắt CB, CD theo thứ tự H và L.}$$

Lập luận tương tự ta cũng có:

- α cắt mặt phẳng (SBC) theo đoạn giao tuyến HK song song với SB.
- α cắt mặt phẳng (SCD) theo đoạn giao tuyến LK song song với SD.

b. **Trước** tiên, ta có ngay:

$$S_{\Delta SBD} = \frac{BD^2\sqrt{3}}{4} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}.$$

Ta lần lượt xét hai trường hợp của thiết diện:

Trường hợp 1: Nếu $I \in OA$ thì $0 < x < \frac{a}{2}$.

Ta **có:**

$$\frac{S_{\Delta MNP}}{S_{\Delta SBD}} = \left(\frac{MN}{BD}\right)^2 = \left(\frac{AI}{AO}\right)^2 = \frac{4x^2}{a^2} \Rightarrow S_{\Delta MNP} = \frac{b^2x^2\sqrt{3}}{a^2}.$$

Trường hợp 2: Nếu $I \in OC$ thì $\frac{a}{2} < x < a$.

Ta có:

$$\frac{S_{\Delta LHK}}{S_{\Delta SBD}} = \left(\frac{LH}{BD}\right)^2 = \left(\frac{CI}{CO}\right)^2 = \frac{4(a-x)^2}{a^2} \Rightarrow S_{\Delta MNP} = \frac{b^2(a-x)^2\sqrt{3}}{a^2}.$$

Tóm lại, ta có:

$$S_{td} = \begin{cases} \dfrac{b^2x^2\sqrt{3}}{a^2} & \text{khi } 0 < x < \dfrac{a}{2} \\ \dfrac{b^2(a-x^2)\sqrt{3}}{a^2} & \text{khi } \dfrac{a}{2} < x < a \end{cases}.$$

Ví dụ 5: *Cho hình chóp* S.ABCD *đáy* ABCD *là hình thang, đáy lớn* AB = 3a, AD = CD = a. *Mặt bên* (SAB) *là tam giác cân đỉnh* S *với* SA = 2a, (α) *là mặt phẳng di động song song với* (SAB), *cắt các cạnh* AD, BC, SC, SD *theo thứ tự tại* M, N, P, Q.

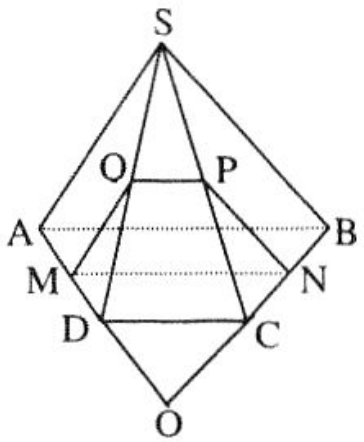
a. *Chứng minh* MNPQ *là hình thang cân.*

b. *Đặt* x = AM, *với* $0 < x < a$. *Định* x *để* MNPQ *ngoại tiếp được một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.*

Giải

a. Ta lần lượt có:

$$\begin{cases} (\alpha)//(SAB) \\ MN = (\alpha)\cap(ABCD) \\ AB = (SAB)\cap(ABCD) \end{cases} \Rightarrow MN // AB.$$



Lập luận tương tự ta cũng có:

NP // BS, PQ // CD, QM // SA.

Nhận xét rằng:

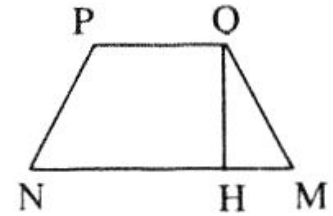
MN // PQ bởi AB // CD.

$$\frac{MQ}{SA} = \frac{DQ}{DS} = \frac{CP}{CS} = \frac{NP}{SB} \overset{SA=SB}{\Rightarrow} MQ = NP.$$

Vậy, thiết diện MNPQ là hình thang cân.

b. Để MNPQ ngoại tiếp được một đường tròn điều kiện là:

$$MN + PQ = MQ + NP \Leftrightarrow MN + PQ = 2MQ. \quad (1)$$



Trong ΔSAD, ta có:

$$\frac{MQ}{SA} = \frac{DM}{DA} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow MQ = 2(a-x). \quad (2)$$

Trong ΔSCD, ta có:

$$\frac{PQ}{CD} = \frac{SQ}{SD} = \frac{AM}{AD} = \frac{x}{a} \Rightarrow PQ = x. \quad (3)$$

Giả sử AB cắt CD tại O và OD = y, ta có:

$$\frac{OD}{OA} = \frac{CD}{AB} = \frac{a}{3a} \Rightarrow 3y = (a) + y \Leftrightarrow y = \frac{a}{2}.$$

$$\frac{MN}{AB} = \frac{OM}{OA} = \frac{OD+DM}{OD+DA} = \frac{\frac{a}{2}+a-x}{\frac{a}{2}+a} \Rightarrow MN = 3a - 2x. \quad (4)$$

ABC

Thay (2), (3) và (4) vào (1), ta được:

$$3a - 2x + x = 4(a - x) \Leftrightarrow x = \frac{a}{3}.$$

Vậy, với $x = \frac{a}{3}$ thì MNPQ ngoại tiếp được một đường tròn.

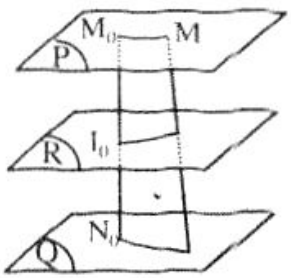
Khi đó, xét hình thang cân MNPQ, hạ đường cao QH, ta có:

$$QH = \sqrt{MQ^2 - MH^2} = \sqrt{MQ^2 - \left(\frac{MN - PQ}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{3}$$

Suy ra bán kính đường tròn nội tiếp MNPQ là $r = \frac{1}{2}QH = \frac{a\sqrt{7}}{6}$.

Ví dụ 6: (Bài 35/tr 68 – Sgk): *Cho hai điểm* M, N *lần lượt thay đổi trên hai mặt phẳng song song* (P) *và* (Q). *Tìm tập hợp các điểm* I *thuộc đoạn thẳng* MN *sao cho* $\frac{IM}{IN} = k, k \neq 0$ *cho trước.*

Giải



Với hai điểm cố định M_0 và N_0 theo thứ tự thuộc (P) và (Q), lấy điểm I_0 thuộc M_0N_0 sao cho $\frac{I_0M_0}{I_0N_0} = k$, ta được:

$$\frac{I_0M_0}{I_0N_0} = \frac{IM}{IN} = k \Rightarrow \frac{I_0M_0}{IM} = \frac{I_0N_0}{IN} = \frac{M_0N_0}{MN}$$

$\Rightarrow M_0M, I_0I, N_0N$ nằm trên ba mặt phẳng song song.

Vậy, tập hợp các điểm I thuộc mặt phẳng (R) qua I_0 và song song với (P).

Vấn đề 3: SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CỦA HÌNH LĂNG TRỤ VÀ HÌNH HỘP – THIẾT DIỆN.

Phương pháp áp dụng

1. Nắm vững định nghĩa và các tính chất của hình lăng trụ và hình hộp để vẽ hình và chứng minh một số tính chất khác.
2. Việc xác định thiết diện của hình lăng trụ (hình hộp) cắt bởi một mặt phẳng cũng tiến hành tương tự như đối với hình chóp. Lưu ý rằng " *Hai đáy hình lăng trụ song song, do đó giao tuyến của mặt phẳng cắt 2 mặt đó, nếu có, là hai đoạn thẳng song song* ".

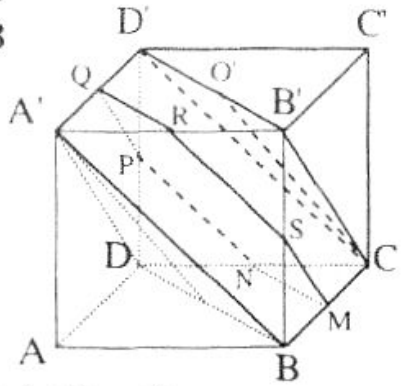
Ví dụ 1: (Bài 37/tr 68 – Sgk): *Cho hình hộp* ABCD.A'B'C'D'.

a. *Chứng minh rằng mặt phẳng* (BDA') // (B'D'C).

b. *Chứng minh rằng đường chéo* AC' *đi qua các trọng tâm* G_1, G_2 *của hai tam giác* BDA' *và* B'D'C.

c. *Chứng minh rằng* G_1 *và* G_2 *chia đoạn thẳng* AC' *thành ba phần bằng nhau.*

d. *Chứng minh rằng các trung điểm của sáu cạnh* BC, CD, DD', D'A', A'B', B'B *cùng nằm trên một mặt phẳng.*



Giải

a. Gọi O, O' theo thứ tự là tâm của các hình bình hành ABCD và A'B'C'D', ta có:

$$\begin{cases} A'O // CO' \\ BD // B'D' \end{cases} \Rightarrow (BDA') // (B'D'C).$$

b. Vì AC', AO, CO' cùng nằm trong mặt phẳng (ACC_1A_1) nên gọi:

$G_1 = AC' \cap A'O$ và $G_2 = AC' \cap CO'$.

Trong $\Delta A'BD$, điểm G_1 thuộc trung tuyến A'O và vì AO // A'C' nên:

$$\frac{GO}{GA'} = \frac{AO}{A'C'} = \frac{1}{2} \Rightarrow G_1 \text{ là trọng tâm } \Delta A'BD.$$

Chứng minh tương tự G_2 là trọng tâm $\Delta CB'D'$.

c. Nhận xét rằng OG_1, $O'G_2$ theo thứ tự là đường trung bình của ΔACG_2 và $\Delta A'C'G_1$ nên:

$$AG_1 = G_1G_2 = G_2C'$$

Tức là G_1, G_2 chia đoạn AC' thành 3 phần bằng nhau.

d. Gọi M, N, P, Q, R, S theo thứ tự là trung điểm của BC, CD, DD', D'A', A'B', B'B.

Vì các đoạn thẳng MN, NP, PQ, QR, RS đều song song với mặt phẳng (A'BD) nên chúng cùng nằm trên một mặt phẳng.

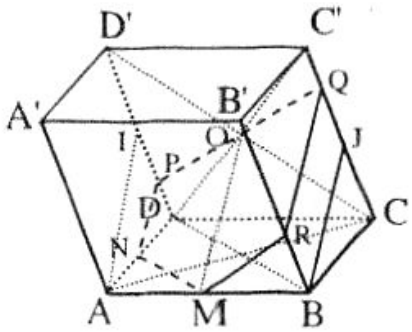
Ví dụ 2: (Bài 6/tr 78 – Sgk): *Cho hình hộp* ABCD.A'B'C'D'. *Vẽ thiết diện của hình hộp tạo bởi mặt phẳng đi qua hai trung điểm* M, N *của các cạnh* AB, AD *và tâm* O *của mặt* CDD'C'.

Giải

Ta lần lượt thực hiện:

- Nối MO.
- Trong (AA'D'D) kẻ NP // AI với I là trung điểm DD' (ta có AI // MO).
- Trong (CC'D'D) nối PO cắt CC' tại Q.
- Trong (CC'B'B) kẻ QR // BJ với J là trung điểm CQ (ta có BJ // MO).
- Nối MR.

Khi đó, thiết diện là ngũ giác MNPQR.



Ví dụ 3: (Bài 7/tr 78 – Sgk): *Cho hình hộp* ABCD.A'B'C'D'. *Trên ba cạnh* AB, DD', C'B' *lần lượt lấy ba điểm* M, N, P *không trùng với các đỉnh sao cho* $\frac{AM}{AB} = \frac{D'N}{D'D} = \frac{B'P}{B'C'}$.

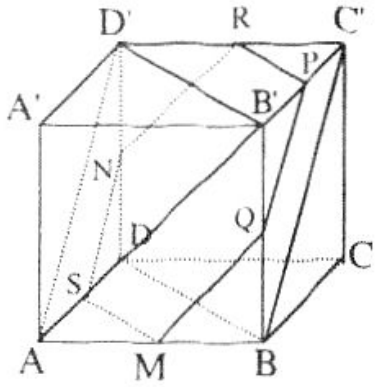
a. *Chứng minh rằng* mp(MNP) *và* mp(AB'D') *song song với nhau.*

b. *Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi mặt phẳng* (MNP).

Giải

a. Từ giả thiết:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{D'N}{D'D}$$



suy ra MN, AD', BD thuộc ba mặt phẳng đôi một song song với nhau. Vì bởi BD // B'D' nên:

MN // (AB'D'). (1)

Từ giả thiết:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{B'P}{B'C'}$$

suy ra MP, AB', BC' thuộc ba mặt phẳng đôi một song song với nhau. Vì bởi BC' // AD' nên:

MP // (AB'D'). (2)

Từ (1) và (2), suy ra (MNP) // (AB'D').

b. Để có được thiết diện, ta thực hiện:

- Kẻ Mx // BD và cắt AD tại S.
- Nối SN.
- Kẻ Py // B'D' và cắt C'D' tại R.
- Kẻ Pz // BC' và cắt BB' tại Q.

Khi đó, lục giác MSNRPQ là thiết diện cần dựng.

Ví dụ 4: (Bài 36/tr 60 – Sgk): *Cho hình lăng trụ tam giác* ABC.A'B'C'. *Gọi* H *là trung điểm của cạnh* A'B'.

a. *Chứng minh rằng đường thẳng* B'C *song song với mặt phẳng* (AHC').

b. *Tìm giao tuyến (d) của hai mặt phẳng* (A'B'C') *và* (A'BC). *Chứng minh rằng (d) song song với mặt phẳng* (BB'C'C).

c. *Xác định thiết diện của hình lăng trụ* ABC.A'B'C' *khi cắt bởi mặt phẳng* (H, d).

Giải

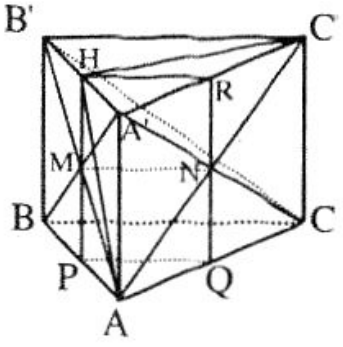
a. Giả sử:

AC' ∩ A'C = {N}

⇒ N là trung điểm của AC' và A'C

⇒ B'C // NH – tính chất đường trung bình

⇒ B'C // (AHC'), đpcm.



b. Giả sử:

AB' ∩ A'B = {M} ⇒ (A'B'C') ∩ (A'BC) = MN.

Từ tính chất đường trung bình, suy ra:

MN // BC ⊂ (BB'C'C) ⇒ MN // (BB'C'C), đpcm.

c. Nối MH cắt AB tại P (P là trung điểm của AB), khi đó:

$(H, d) \cap (ABC) = Px \,//\, MN \,//\, BC$,

$\Rightarrow$ Px cắt AC tại Q (Q là trung điểm của AC).

$(H, d) \cap (A'B'C') = Hy \,//\, MN \,//\, BC \,//\, B'C'$

$\Rightarrow$ Hy cắt A'C' tại R (R là trung điểm của A'C').

Khi đó, ta được thiết diện là hình bình hành HPQR.

Ví dụ 5: (Bài 38/tr 68 – Sgk): *Chứng minh rằng tổng bình phương tất cả các đường chéo của một hình hộp bằng tổng bình phương tất cả các cạnh của hình hộp đó.*

Giải

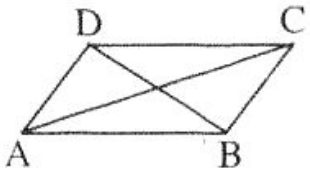
Trước tiên ta đi chứng minh mệnh đề *"Tổng bình phương các đường chéo của một hình bình hành bằng tổng bình phương các cạnh"*.

Thật vậy, với hình bình hành ABCD, theo định lí hàm số côsin ta có:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC.\cos\widehat{ABC}$. (1)

$BD^2 = CD^2 + CB^2 - 2CD.CB.\cos\widehat{BCD}$. (2)

$= CD^2 + DA^2 - 2AB.BC.\cos\widehat{BCD}$. (2)

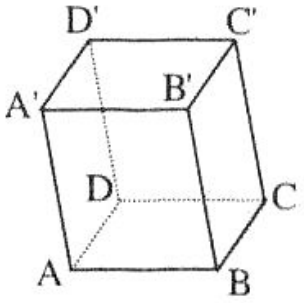


Cộng theo vế (1) và (2), ta được:

$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 - 2AB.BC.(\cos\widehat{ABC} + \cos\widehat{BCD})$

$= AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$, đpcm.

Sử dụng mệnh đề trên, ta thấy:



$A'C^2 + C'A^2 + D'B^2 + B'D^2$

$= A'A^2 + AC^2 + C'C^2 + C'A'^2 +$

$+ BD^2 + D'D^2 + D'B'^2 + B'B^2$

$= (A'A^2 + B'B^2 + C'C^2 + D'D^2) +$

$(AC^2 + BD^2) + (A'C'^2 + B'D'^2)$

$= (A'A^2 + B'B^2 + C'C^2 + D'D^2) + (AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2) +$

$+ (A'B'^2 + B'C'^2 + C'D'^2 + A'D'^2)$, đpcm.

Ví dụ 6: *Cho hình lăng trụ tam giác* ABC.A'B'C'. *Gọi* G, G' *lần lượt là trọng tâm của tam giác* ABC *và* A'B'C'. *Một mặt phẳng* (α) *cắt các cạnh* AA', BB', CC', GG' *lần lượt tại* A_1, B_1, C_1 *và* G_1. *Chứng minh rằng:*

a. GG' *song song và bằng cạnh bên của hình lăng trụ.*

b. G_1 *là trọng tâm của tam giác* $A_1B_1C_1$.

c. $G_1G' = \frac{1}{3}(A_1A' + B_1B' + C_1C')$,

$G_1G = \frac{1}{3}(A_1A + B_1B + C_1C)$.

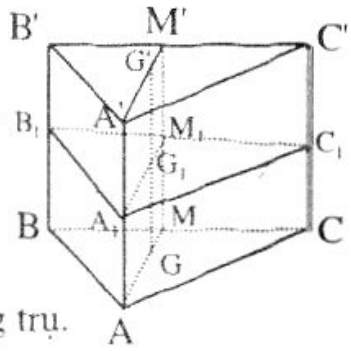
ABC

✍ *Giải*

a. Gọi M và M' theo thứ tự là trung điểm của BC và B'C, suy ra:

$MM' \overset{//}{=} BB' \overset{//}{=} CC' \overset{//}{=} AA'$,

$MM' \cap B_1C_1 = \{M_1\}$, với M_1 là trung điểm của B_1C_1.



Trong (AA'M'M) , ta có:

$$\frac{AG}{AM} = \frac{AG'}{AM'} = \frac{2}{3} \Rightarrow GG' \overset{//}{=} MM',$$

Từ đó, suy ra GG' song song và bằng cạnh bên của hình lăng trụ.

b. Ta có:

$$\frac{A_1G_1}{A_1M_1} = \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3} \qquad (*)$$

$\Rightarrow G_1$ là trọng tâm của tam giác $A_1B_1C_1$.

c. Từ kết quả (*), ta có:

$$G_1G' = \frac{1}{3}A_1A' + \frac{2}{3}M_1M' = \frac{1}{3}A_1A' + \frac{2}{3}.\frac{1}{2}(B_1B' + C_1C')$$

$$= \frac{1}{3}(A_1A' + B_1B' + C_1C').$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có $G_1G = \frac{1}{3}(A_1A + B_1B + C_1C)$.

Ví dụ 7: *Cho lăng trụ tam giác* ABC. $A_1B_1C_1$, *đáy là tam giác đều cạnh* a. *Các mặt bên* ABB_1A_1, ACC_1A_1 *là hình vuông. Gọi* I, J *là tâm các mặt bên nói trên và* O *là tâm đường tròn ngoại tiếp* ΔABC.

a. *Chứng minh* IJ *song song với mặt phẳng* (ABC).

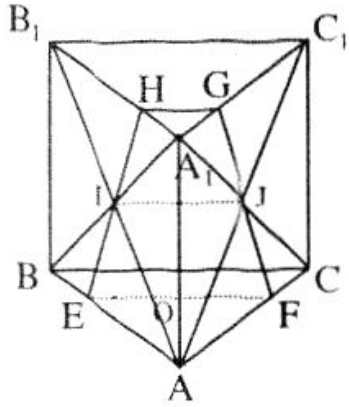
b. *Xác định thiết diện của lăng trụ với mặt phẳng* (IJO). *Chứng minh thiết diện là thang cân. Tính diện tích của nó theo* a.

✍ *Giải*

a. Nhận xét rằng:

$$\frac{IA_1}{IB} = \frac{JA_1}{JC} = 1$$

$\Rightarrow IJ \,//\, BC \subset (ABC) \Rightarrow IJ \,//\, (ABC)$.



b. Ta lần lượt có:

$$\begin{cases} IJ \in (IJO) \text{ và } BC \in (ABC) \\ IJ \,//\, BC \\ (IJO) \cap (ABC) = Ox \end{cases} \Rightarrow Ox \,//\, IJ \,//\, BC.$$

và Ox cắt AB và AC theo thứ tự tại E và F.

Nối EI cắt A_1B_1 tại H và nối FI cắt A_1C_1 tại G. Như vậy, thiết diện là tứ giác EFGH.

Nhận xét rằng:

$$\begin{cases}(ABC)\,//\,(A_1B_1C_1)\\(IJO)\cap(ABC)=EF\\(IJO)\cap(A_1B_1C_1)=GH\end{cases}\Rightarrow EF\,//\,GH\Rightarrow EFGH \text{ là hình thang.}$$

Vì ΔABC nên $AA_1B_1B = AA_1C_1C$, do đó $EH = FG$.

Vậy, thiết diện EFGH là hình thang cân.

- Trong ΔABC, ta có:

$$\frac{EF}{BC}=\frac{2}{3}\Rightarrow EF=\frac{2a}{3}.$$

- Trong $\Delta A_1B_1C_1$, ta có:

$$\frac{HG}{B_1C_1}=\frac{A_1H}{A_1B_1}=\frac{BE}{BA}=\frac{1}{3}\Rightarrow HG=\frac{a}{3}.$$

- Trong ΔIBE, ta có:

$$IE^2=BI^2+BE^2-2BI.BE.\cos\widehat{IBE}$$

$$=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^2-2.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{a}{3}.\cos45^0=\frac{5a^2}{18}$$

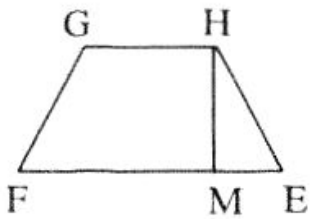
$$\Rightarrow IE=\frac{a\sqrt{10}}{6}\Rightarrow EH=2IE=\frac{a\sqrt{10}}{3}.$$

Khi đó, xét hình thang cân EFGH, hạ đường cao HM, ta có:

$$HM=\sqrt{EH^2-ME^2}=\sqrt{EH^2-\left(\frac{EF-HG}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{39}}{6}.$$

$$S_{EFGH}=\frac{1}{2}(EF+HG).HM$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2a}{3}+\frac{a}{3}\right).\frac{a\sqrt{39}}{6}=\frac{a^2\sqrt{39}}{12}.$$



☞ ***Chú ý***: Trong lời giải trên:

1. Ở câu a), chúng ta có thể sử dụng nhận xét:

 IJ là đường trung bình của $\Delta A_1BC \Leftrightarrow IJ \overset{//}{=} \frac{1}{2}BC$ (ta có $IJ=\frac{a}{2}$).

2. Khi đó, trong câu b), chúng ta có thể tính độ dài HG dựa trên tính chất IJ là đường trung bình của hình thang EFGH như sau:

$$IJ=\frac{1}{2}(EF+HG)\Rightarrow HG=2IJ-EF=2.\frac{a}{2}-\frac{2a}{3}=\frac{a}{3}.$$

Vấn đề 4: CÁC BÀI TOÁN VỀ CHÓP CỤT

Phương pháp áp dụng

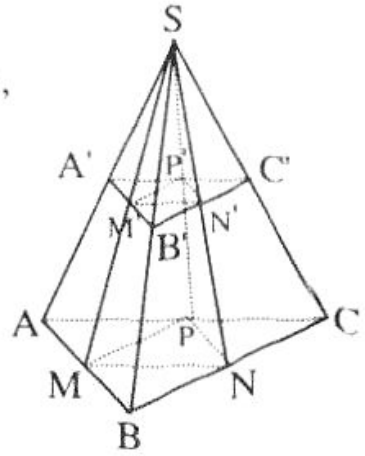
1. Nắm vững định nghĩa và các tính chất của hình hộp để vẽ hình và chứng minh một số tính chất khác.
2. Việc xác định thiết diện của hình hộp cắt bởi một mặt phẳng cũng tiến hành tương tự như đối với hình lăng trụ.

Ví dụ 1: (Bài 39/tr 68 – Sgk): *Cho hình chóp cụt* ABC.A'B'C' *có đáy lớn* ABC *và các cạnh bên* AA', BB', CC'. *Gọi* M, N, P *lần lượt là trung điểm của các cạnh* AB, BC, CA *và* M', N', P' *lần lượt là trung điểm của các cạnh* A'B', B'C', C'A'. *Chứng minh* MNP.M'N'P' *là hình chóp cụt.*

Giải

Để chứng minh MNP.M'N'P' là hình chóp cụt, ta cần đi chứng minh:

- Các đường thẳng MM', NN', PP' đồng quy.
- MN // M'N', NP // N'P', PM // P'M'.



a. Gọi S là điểm đồng quy của các đường thẳng AA', BB', CC', ta có:

AB // A'B'

M, M' theo thứ tự là trung điểm của AB, A'B'

suy ra S ∈ MM'.

Tương tự, ta cũng có S ∈ NN' và S ∈ PP'.

Vậy, các đường thẳng MM', NN', PP' đồng quy tại S.

b. Theo tính chất đường trung bình, ta có:

MN // AC; M'N' // A'C'

Ngoài ra, theo tính chất hình chóp cụt AC // A'C' nên MN // M'N'.

Tương tự, ta cũng có NP // N'P', PM // P'M'.

Vậy, ta có kết luận MNP.M'N'P' là hình chóp cụt.

Ví dụ 2: *Cho hình chóp* S.ABCD. *Gọi* A_1 *là trung điểm của cạnh* SA *và* A_2 *là trung điểm của đoạn* AA_1. *Gọi* (α) *và* (β) *là hai mặt phẳng song song với mặt phẳng* (ABCD) *và lần lượt đi qua* A_1, A_2. *Mặt phẳng* (α) *cắt các cạnh* SB, SC, SD *lần lượt tại* B_1, C_1, D_1. *Mặt phẳng* (β) *cắt các cạnh* SB, SC, SD *lần lượt tại* B_2, C_2, D_2. *Chứng minh* :

a. B_1, C_1, D_1 *lần lượt là trung điểm của các cạnh* SB, SC, SD.

b. $B_1B_2 = B_2B$, $C_1C_2 = C_2C$, $D_1D_2 = D_2D$.

c. *Chỉ ra các hình chóp cụt có một đáy là tứ giác* ABCD.

Giải

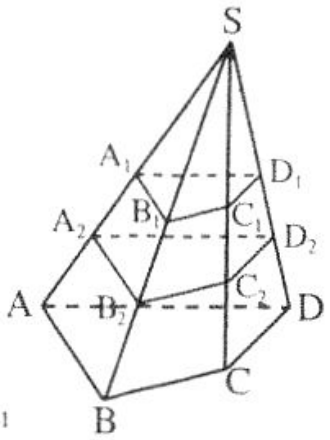
a. Vì (α) song song với (ABCD), suy ra:

$AB // A_1B_1$

$\Rightarrow A_1B_1$ là đường trung bình của ΔSAB

$\Rightarrow B_1$ là trung điểm của SB.

Chứng minh tương tự, ta được C_1, D_1 lần lượt là trung điểm của các cạnh SC, SD.



b. Vì (β) song song với (ABCD), suy ra:

$AB // A_2B_2$

$\Rightarrow A_2B_2$ là đường trung bình của hình thang ABB_1A_1

$\Rightarrow B_2$ là trung điểm của $BB_1 \Rightarrow B_1B_2 = B_2B$.

Chứng minh tương tự, ta được $C_1C_2 = C_2C$, $D_1D_2 = D_2D$.

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài tập 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

a. Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì song song với nhau.

b. Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Bài tập 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

a. Nếu hai mặt phẳng song song thì mọi đường thẳng nằm trên một mặt phẳng đều song song với mặt phẳng còn lại.

b. Nếu hai mặt phẳng song song thì mỗi đường thẳng nằm trên mặt phẳng này đều song song với mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng kia.

c. Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì song song với nhau.

Bài tập 3. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD.

a. Chứng minh rằng (OMN) song song với (SBD).

b. Gọi P và Q là trung điểm của AB và ON. Chứng minh rằng PQ song song với (SBC).

Bài tập 4. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J là hai điểm di động lần lượt trên các cạnh AD, BC sao cho luôn có $\frac{IA}{ID} = \frac{JB}{JC}$.

a. Chứng minh rằng IJ luôn song song với một mặt phẳng cố định.

b. Tìm tập hợp điểm M chia đoạn IJ theo tỉ số k cho trước (tức điểm M thoả $\vec{IM} = k.\vec{MJ}$).

Bài tập 5. Cho hai đường thẳng chéo nhau (a) và b. Tìm tập hợp các điểm I trên đoạn thẳng MN và chia MN theo tỉ số k cho trước khi M, N di động lần lượt trên a, b.

Bài tập 6. Cho hai mặt phẳng song song (α) và (β). A, B, C là ba điểm không thẳng hàng thuộc (α) và MN là đoạn thẳng nằm trong (β).

a. Tìm giao tuyến của (MAB) và (β); giao tuyến của (NAC) và (β).

b. Tìm giao tuyến của (MAB) và (NAC).

Bài tập 7. Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình thang, đáy lớn AB = 3a, AD = CD = a. Mặt bên (SAB) là tam giác cân đỉnh S với SA = 2a, (α) là mặt phẳng di động song song với (SAB), cắt các cạnh AD, BC, SC, SD theo thứ tự tại M, N, P, Q.

a. Gọi I là giao điểm của MQ và NP. Tìm tập hợp những điểm I khi M di động trên AD.

b. Gọi J là giao điểm của MP và NQ. Chứng minh IJ có phương không đổi và J di động trong một mặt phẳng cố định.

Bài tập 8. Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình thang có các cạnh đáy AB, CD với CD = p.AB $(0 < p < 1)$. S_0 là diện tích tam giác SAB. (α) là mặt phẳng qua điểm M trên cạnh AD và song song với mặt phẳng (SAB). Đặt $\frac{DM}{AD} = x$, với $0 < x < 1$.

a. Xác định thiết diện của hình chóp S.ABCD với mặt phẳng (α). Tính diện tích thiết diện theo S_0, p, x.

b. Tính x để diện tích thiết diện bằng một nửa diện tích tam giác SAB.

Bài tập 9. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Điểm M nằm giữa A và D, điểm N nằm giữa C và C' sao cho $\frac{AM}{MD} = \frac{CN}{NC'}$.

a. Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với mp(ACB').

b. Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi mặt phẳng đi qua MN và song song với mp(ACB').

Bài tập 10. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$. Gọi M, M_1 theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC và B_1C_1.

a. Chứng minh rằng AM // A_1M_1.

b. Tìm giao điểm của mặt phẳng (AB_1C_1) với đường thẳng A_1M.

c. Tìm giao tuyến (d) của hai mặt phẳng (AB_1C_1) và (BA_1C_1).

d. Tìm giao điểm G của đường thẳng (d) với mặt phẳng (AMA_1). Chứng minh rằng G là trọng tâm ΔAB_1C_1.

Bài tập 11. Cho hình hộp ABCD. $A_1B_1C_1D_1$.

a. Chứng minh rằng $(BDA_1) // (B_1D_1C)$.

b. Chứng minh đường chéo AC_1 đi qua các trọng tâm G, G_1 của ΔA_1BD và ΔCB_1D_1 và G, G_1 chia đoạn AC_1 làm 3 phần bằng nhau.

c. Xác định thiết diện cắt bởi mặt phẳng $(A_1B_1G_1)$ với hình hộp đã cho. Thiết diện là hình gì?

d. Gọi O, K lần lượt là tâm các hình bình hành ABCD và BCC_1B_1. Xác định thiết diện cắt bởi mặt phẳng (A_1OK) với hình hộp đã cho.

Bài tập 12. Cho hình lập phương ABCD.$A_1B_1C_1D_1$ cạnh a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, B_1C_1 và DD_1.

a. Chứng minh (MNP) song song với các mặt phẳng (AB_1D_1) và (BDC_1).

b. Xác định thiết diện của hình lập phương với mặt phẳng (MNP). Thiết diện là hình gì? Tính diện tích của nó.

Bài tập 13. Cho hình lập phương ABCD.$A_1B_1C_1D_1$ cạnh a. Trên AB, CC_1, C_1D_1 và AA_1 lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q sao cho $AM = C_1N = C_1P = AQ = x$, với $0 \le x \le a$.

a. Chứng minh 4 điểm M, N, P, Q đồng phẳng và MP, NQ cắt nhau tại một điểm cố định.

b. Chứng minh mặt phẳng (MNPQ) luôn chứa một đường thẳng cố định. Định x để $(MNPQ) // (A_1B_1C_1)$.

c. Dựng thiết diện của hình lập phương cắt bởi (MNPQ). Thiết diện có đặc điểm gì về cạnh? Tính giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của chu vi thiết diện.

Bài tập 14. Cho lăng trụ tam giác ABC. $A_1B_1C_1$. Các điểm M, N lần lượt là trung điểm của BC và CC_1. P là điểm đối xứng của C qua A.

a. Xác định thiết diện của lăng trụ với mặt phẳng (A_1MN). Tính tỉ số mà thiết diện chia cạnh AB.

b. Xác định thiết diện của lăng trụ với mặt phẳng (MNP). Tính tỉ số mà thiết diện chia cạnh AA_1 và AB.

Bài tập 15. Cho hình chóp cụt ABCD.$A_1B_1C_1D_1$ trong đó ABCD là đáy lớn có diện tích bằng s_1 và $A_1B_1C_1D_1$ là đáy nhỏ có diện tích bằng s_2.

a. Gọi S là điểm đồng quy của các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Chứng minh rằng:

$$\frac{SA_1}{SA} = \frac{SB_1}{SB} = \frac{SC_1}{SC} = \frac{SD_1}{SD}.$$

b. Gọi M là trung điểm của AA_1, mặt phẳng (α) qua M và song song với mặt phẳng đáy (ABCD). Xác định thiết diện của hình chóp cụt với mặt phẳng (α). Tính diện tích thiết diện theo s_1 và s_2.

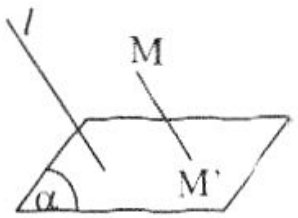
CHỦ ĐỀ 5 PHÉP CHIẾU SONG SONG

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. PHÉP CHIẾU SONG SONG

Cho mặt phẳng (α) và một đường thẳng l không song song với (α).

Với mỗi điểm M trong không gian, đường thẳng qua M song song với l sẽ cắt (α) tại điểm M'. Điểm M' được gọi là *hình chiếu song song* của điểm M trên mặt phẳng (α) theo phương l.



Mặt phẳng (α) gọi là *mặt phẳng chiếu*.

Định nghĩa: *Phép đặt tương ứng mỗi điểm* M *trong không gian với hình chiếu* M' *của nó trên* (α) *được gọi là* ***phép chiếu song song lên mặt phẳng*** (α) ***theo phương*** l.

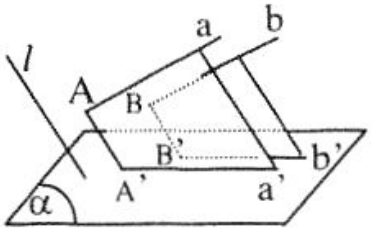
☞ ***Chú ý***: Nếu (a) // l thì hình chiếu của (a) lên (α) là một điểm trên (α) (chính là giao điểm của (a) với α), do vậy các tính chất trong phần sau chỉ xét những đoạn thẳng hoặc đường thẳng không song song với l.

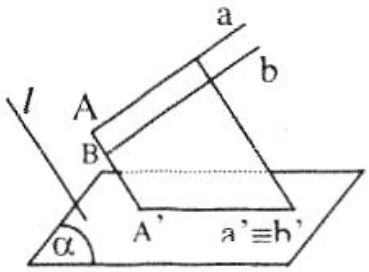
2. TÍNH CHẤT

Tính chất 1: *Hình chiếu song song của một đường thẳng là một đường thẳng.*

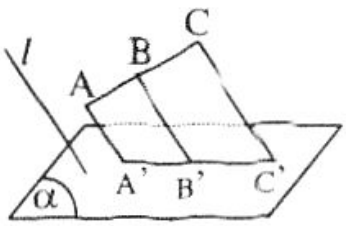
Hệ quả: *Hình chiếu song song của một tia là một tia, của một đoạn thẳng là một đoạn thẳng.*

Tính chất 2: *Hình chiếu song song của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.*





Tính chất 3: *Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng hoặc song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.*



Tức là:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}.$$

ABC

3. HÌNH BIỂU DIỄN CỦA MỘT HÌNH KHÔNG GIAN

Ta thường vẽ các hình không gian như hình chóp, hình lăng trụ, ... trên bảng hay trên trang giấy, các hình vẽ đó gọi là *hình biểu diễn của một hình không gian trên mặt phẳng.*

Định nghĩa: *Hình biểu diễn của một hình $\mathcal{H}$ trong không gian là hình chiếu song song của $\mathcal{H}$ lên một mặt phẳng nào đó theo một phương chiếu nào đó.*

Các yêu cầu đối với một hình biểu diễn:

1. *Hình biểu diễn phải đúng*: Để vẽ đúng chúng ta cần quan tâm tới các yếu tố được bảo toàn sau:
 a. Sự thẳng hàng và thứ tự của các điểm trên một đường thẳng.
 b. Sự song song của các đường thẳng, các tia hoặc các đoạn thẳng.
 c. Tỉ số độ dài của các đoạn thẳng cùng phương.

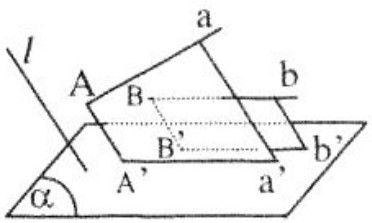
 Như vậy, *các tính chất của hình không thay đổi qua phép chiếu song song đều được giữ nguyên trên hình biểu diễn.*
2. *Hình biểu diễn phải nổi*: Giúp chúng ta dễ tưởng tượng.

 Chúng ta có:
 - ***Tam giác***: Một ΔABC có thể xem là hình biểu diễn của một tam giác bất kì (đều, cân, vuông).
 - ***Hình bình hành***: Một hình bình hành ABCD có thể xem là hình biểu diễn của các loại hình bình hành như hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi và hình bình hành bất kì.
 - ***Đường tròn***: Để biểu diễn đường tròn chúng ta sử dụng một hình Elíp.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Ví dụ 1: *Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau hay không?*

Giải



Từ hình vẽ, ta thấy hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau (a) và (b) theo phương chiếu *l* trên mặt phẳng (α) có thể song song với nhau. Trường hợp này xảy ra khi " *Mặt phẳng* (β) *song song với (a) và (b) sẽ chứa l hoặc song song với l* ".

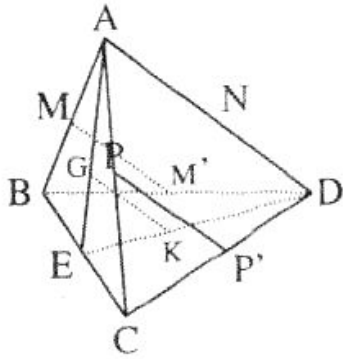
Ví dụ 2: *Cho tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm ΔABC.*

a. *Chứng minh hình chiếu song song K của điểm G trên mặt phẳng (BCD) theo phương chiếu AD là trọng tâm ΔBCD.*

b. *Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC, AD. Tìm hình chiếu song song của các điểm M, N, P trong phép chiếu song song ở câu a).*

ABC

Giải



a. Từ giả thiết, ta được:

GK // AD,

AG ∩ DK = E là trung điểm của BC,

suy ra:

$$\frac{EK}{KD} = \frac{EG}{GA} = \frac{1}{2} \Rightarrow K \text{ là trọng tâm } \Delta BCD.$$

b. Ta lần lượt thực hiện:

- Trong (ABD) dựng Mx song song với AD và cắt BD tại M', khi đó M' chính là hình chiếu song song của điểm M trong phép chiếu song song ở câu a).
- Vì N thuộc AD nên D chính là hình chiếu song song của điểm N trong phép chiếu song song ở câu a).
- Trong (ACD) dựng Ny song song với AD và cắt CD tại N', khi đó N' chính là hình chiếu song song của điểm N trong phép chiếu song song ở câu a).

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài tập 1. Chứng tỏ rằng phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm đó.

Bài tập 2. Cho ba điểm A, B, C nằm ngoài mặt phẳng (α). Giả sử BC song song với (α), còn AB và AC cắt (α) lần lượt tại D và E. Hãy chọn phương chiếu *l* sao cho hình chiếu của tam giác ABC trên (α) theo phương *l* là một tam giác đều.

Bài tập 3. Cho hai điểm A và B ở ngoài mặt phẳng (α), giả sử đường thẳng AB cắt (α) tại O. Gọi A' và B' theo thứ tự là hình chiếu song song của hai điểm A và B trên mặt phẳng (α) theo phương của đường thẳng *l* cho trước nào đó.

a. Chứng minh rằng ba điểm O, A', B' thẳng hàng.

b. Hãy chọn phương *l* sao cho:

AB = A'B' AB = 2A'B'.

Bài tập 4. Chứng minh rằng trọng tâm G của ΔABC có hình chiếu song song là trọng tâm G' của ΔA'B'C', trong đó ΔA'B'C' là hình chiếu song song của ΔABC.

Bài tập 5. Trong mặt phẳng (α) cho ΔABC bất kì. Chứng minh rằng có thể xem:

a. ABC là hình chiếu song song của một tam giác cân nào đó.

b. ABC là hình chiếu song song của một tam giác đều nào đó.

c. ABC là hình chiếu song song của một tam giác vuông nào đó.

Bài tập 6. Cho hai tia Ax và By nằm trên hai đường thẳng chéo nhau. Một điểm M chạy trên Ax và một điểm N chạy trên By sao cho AM = kBN (k > 0 cho trước).

a. Chứng minh rằng MN song song với một mặt phẳng cố định.

b. Tìm tập hợp các điểm I thuộc đoạn MN sao cho IM = kIN.

CHƯƠNG III

VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

CHỦ ĐỀ 1 VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN SỰ ĐỒNG PHẲNG CỦA CÁC VECTƠ

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

Vectơ, các phép toán vectơ trong không gian được định nghĩa hoàn toàn giống như trong mặt phẳng, chúng có các tính chất đã biết.

Quy tắc hình hộp: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$, ta luôn có:

$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}.$$

Trọng tâm của tứ diện: Điểm G là trọng tâm của tứ diện ABCD khi và chỉ khi:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}.$$

2. SỰ ĐỒNG PHẲNG CỦA CÁC VECTƠ. ĐIỀU KIỆN ĐỂ BA VECTƠ ĐỒNG PHẲNG

Định nghĩa: *Ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu giá của chúng song song với một mặt phẳng.*

Định lí 1 (*Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng*): *Cho hai vectơ không cùng phương* $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$. *Khi đó ba vectơ* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *đồng phẳng khi và chỉ khi có các số* m, n *sao cho* $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$. *Hơn nữa, các số* m, n *là duy nhất.*

Định lí 2: *Nếu ba vectơ* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *và* $\vec{c}$ *không đồng phẳng thì với vectơ* $\vec{d}$ *bất kì, ta đều tìm được các số* m, n, p *sao cho* $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$. *Hơn nữa, các số* m, n, p *là duy nhất.*

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: CHỨNG MINH MỘT ĐẲNG THỨC VECTƠ

Phương pháp áp dụng

Sử dụng:

- *Quy tắc ba điểm*: Ta có:

 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$, xen điểm C.

 $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$, hiệu hai vectơ cùng gốc.

- *Quy tắc hình bình hành*: Với hình bình hành ABCD luôn có:
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.$$
- *Quy tắc hình hộp*: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$, ta luôn có:
$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}.$$
- *Quy tắc trung điểm*: Với điểm M tuỳ ý và I là trung điểm của AB luôn có:
$$\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}).$$
- *Trọng tâm của tam giác*: Điểm G là trọng tâm của ΔABC khi và chỉ khi:
$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$
- *Trọng tâm của tứ diện*: Điểm G là trọng tâm của tứ diện ABCD khi và chỉ khi:
$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}.$$
- Các tính chất của phép cộng, trừ vectơ và phép nhân một số với một vectơ.

Để thực hiện phép biến đổi tương đương cho đẳng thức cần chứng minh. Và khi đó, ta lựa chọn một trong các hướng biến đổi sau:

Hướng 1: Biến đổi một vế thành vế còn lại (VT $\Rightarrow$ VP hoặc VP $\Rightarrow$ VT). Khi đó:
- Nếu xuất phát từ vế phức tạp ta cần thực hiện việc đơn giản biểu thức.
- Nếu xuất phát từ vế đơn giản ta cần thực hiện việc phân tích vectơ.

Hướng 2: Biến đổi đẳng thức cần chứng minh về một đẳng thức đã biết là luôn đúng.

Hướng 3: Biến đổi một đẳng thức vectơ đã biết là luôn đúng thành đẳng thức cần chứng minh.

Hướng 4: Tạo dựng các hình phụ.

Ví dụ 1: (Bài 2/tr 91 – Sgk): *Cho hình chóp* S.ABCD.
a. *Chứng minh rằng nếu* ABCD *là hình bình hành thì* $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$. *Điều ngược lại có đúng không ?*
b. *Gọi* O *là giao điểm của* AC *và* BD. *Chứng tỏ rằng* ABCD *là hình bình hành khi và chỉ khi* $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$.

✍ *Giải – Bạn đọc tự vẽ hình*

a. Nếu ABCD là hình bình hành với tâm O thì:
$$\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO}, \qquad \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO},$$

từ đó, suy ra:

$$\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}.$$

Điều ngược lại cũng đúng, thật vậy:

$$\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} \Leftrightarrow \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

$\Leftrightarrow$ ABCD là hình bình hành.

b. Trước tiên, vì O là giao điểm của AC và BD nên:

- O, A, C thẳng hàng, suy ra $\exists m$: $\overrightarrow{OA} = m\overrightarrow{OC}$.
- O, B, D thẳng hàng, suy ra $\exists n$: $\overrightarrow{OB} = n\overrightarrow{OD}$.

Khi đó:

$$4\overrightarrow{SO} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD}$$

$$= (\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OD})$$

$$= 4\overrightarrow{SO} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD})$$

$$\Leftrightarrow (m+1)\overrightarrow{OC} + (n+1)\overrightarrow{OD} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1=0 \\ n+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ n=-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$ O là trung điểm của AC và BD

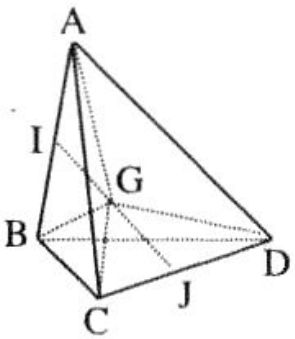
$\Leftrightarrow$ ABCD là hình bình hành.

Ví dụ 2: *Điểm* G *là trọng tâm của tứ diện* ABCD, *chứng minh rằng:*

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}, \text{ với mọi điểm M.}$$

Giải

Gọi I và J theo thứ tự là trung điểm của AB và CD, sử dụng quy tắc ba điểm bằng cách xen vào giữa, ta lần lượt có:



$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA},$$
$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB},$$
$$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC},$$
$$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD},$$

Suy ra:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4 + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) = 4, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 3: *Cho hình hộp* $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. *Gọi* P, R *theo thứ tự là trung điểm của* AB, A_1D_1, *gọi* P_1, Q, Q_1, R_1 *theo thứ tự là giao điểm của các đường chéo của các mặt* ABCD, CDD_1C_1, $A_1B_1C_1D_1$, ADD_1A_1.

a. *Chứng minh rằng* $\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{QQ_1} + \overrightarrow{RR_1} = \vec{0}$.

b. *Chứng minh hai tam giác* PQR và $P_1Q_1R_1$ *có trọng tâm trùng nhau.*

Giải

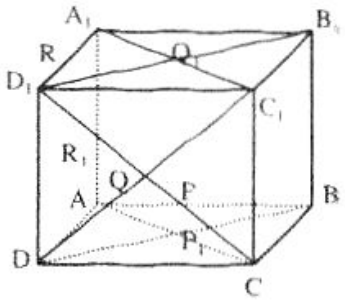
a. Ta có:

$$\overrightarrow{PP_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}, \qquad \overrightarrow{QQ_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB_1}, \qquad \overrightarrow{RR_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B_1B},$$

Suy ra:

$$\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{QQ_1} + \overrightarrow{RR_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{B_1B}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BB} = \vec{0}.$$

b. Gọi G, G_1 theo thứ tự là trọng tâm các tam giác PQR và $P_1Q_1R_1$, ta có:



$$\overrightarrow{PP_1} = \overrightarrow{PG} + \overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1P_1},$$

$$\overrightarrow{QQ_1} = \overrightarrow{QG} + \overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1Q_1},$$

$$\overrightarrow{RR_1} = \overrightarrow{RG} + + \overrightarrow{G_1R_1},$$

Suy ra:

$$\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{QQ_1} + \overrightarrow{RR_1} = (\overrightarrow{PG} + \overrightarrow{QG} + \overrightarrow{RG}) + 3\overrightarrow{GG_1} + (\overrightarrow{G_1P_1} + \overrightarrow{G_1Q_1} + \overrightarrow{G_1R_1})$$

$$\Leftrightarrow \vec{0} = 3\overrightarrow{GG_1} \Leftrightarrow G \equiv G_1.$$

Vấn đề 2: CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

Phương pháp áp dụng

Muốn chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng, ta đi chứng minh:

$$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC},\ k \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

Để nhận được (1), ta lựa chọn một trong hai hướng:

Hướng 1: Sử dụng các quy tắc biến đổi vectơ đã biết.

Hướng 2: Xác định vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ thông qua một tổ hợp trung gian.

☞ ***Chú ý:***

1. Sử dụng kết quả trong nhận xét quan trọng ở bài toán 3, ta có được kết quả sau:
 "*Cho ba điểm A, B, C. Điều kiện cần và đủ để* A, B, C *thẳng hàng là:*

$$\overrightarrow{MC} = \alpha\overrightarrow{MA} + (1-\alpha)\overrightarrow{MB},$$

với điểm tuỳ ý M và số thực α *bất kỳ*".

 Đặc biệt khi $0 \le \alpha \le 1$ thì điểm C thuộc đoạn AB.
2. Kết quả trên còn được sử dụng để tìm điều kiện cho ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Ví dụ 1: *Cho hai đường thẳng* (Δ), (Δ_1) *cắt ba mặt phẳng song song* (α), (β), (γ) *lần lượt tại* A, B, C và A_1, B_1, C_1. *Với* O *là điểm bất kì trong không gian, đặt* $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{CC_1}$. *Chứng minh rằng ba điểm* I, J, K *thẳng hàng.*

✍ *Giải*

Từ giả thiết và theo định lí Ta–lét, ta có $\overrightarrow{BA} = k\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{B_1A_1} = k\overrightarrow{B_1C_1}$.

Khi đó, ta lần lượt:

- Với $\overrightarrow{BA} = k\overrightarrow{BC}$ thì:

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = k(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} = \frac{1}{1-k}(\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OC}).$$

- Với $\overrightarrow{B_1A_1} = k\overrightarrow{B_1C_1}$ thì:

$$\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OB_1} = k\left(\overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OB_1}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{OB_1} = \frac{1}{1-k}\left(\overrightarrow{OA_1} - k\overrightarrow{OC_1}\right)$$

Khi đó:

$$\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OB} = \frac{1}{1-k}\left(\overrightarrow{OA_1} - k\overrightarrow{OC_1}\right) - \frac{1}{1-k}\left(\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OC}\right)$$

$$= \frac{1}{1-k}\left(\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA}\right) - \frac{k}{1-k}\left(\overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{AA_1} - \frac{k}{1-k}\overrightarrow{CC_1}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OJ} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{OI} - \frac{k}{1-k}\overrightarrow{OK}.$$

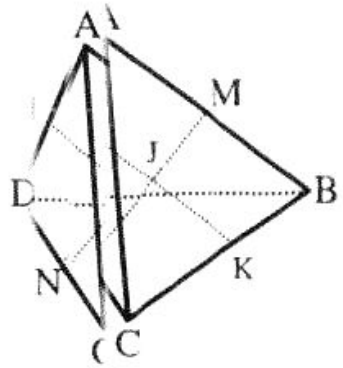
Nhận xét rằng trong đẳng thức trên:

$$\frac{1}{1-k} + \left(-\frac{k}{1-k}\right) = 1 \Rightarrow \text{I, J, K thẳng hàng.}$$

☞ *Nhận xét*: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên để chứng minh ba điểm I, J, K thẳng hàng chúng ta không sử dụng điều kiện đã được nêu trong nội dung bài toán (tức chứng minh $\overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{IK}$) bởi đó là công việc khó, và thay vào đó chứng minh ba vectơ $\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}$ thoả mãn: $\overrightarrow{OJ} = \alpha\overrightarrow{OI} + \beta\overrightarrow{OK}$, với $\alpha + \beta = 1$.

Ví dụ 2: (Bài 1/tr 113 – Sbt): *Cho tứ diện* ABCD. *Gọi* M, N *là các điểm lần lượt thuộc* AB và CD *sao cho* $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{ND} = -2\overrightarrow{NC}$. *Các điểm* I, J, K *lần lượt thuộc* AD, MN, BC *sao cho* $\overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{ID}$, $\overrightarrow{JM} = k\overrightarrow{JN}$, $\overrightarrow{KB} = k\overrightarrow{KC}$. *Chứng minh rằng các điểm* I, J, K *thẳng hàng.*

Giải



Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Ta lần lượt có:

- Với vectơ $\overrightarrow{IJ}$, ta có biểu diễn:

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MJ}. \quad (1)$$

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{NJ}$$

$$\Leftrightarrow k\overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{ID} + k\overrightarrow{DN} + k\overrightarrow{NJ} = \overrightarrow{IA} + k\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{MJ}. \quad (2)$$

Trừ theo vế (1) cho (2), ta được:

$$(1-k)\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AM} - k\overrightarrow{DN}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{AM} - \frac{k}{1-k}\overrightarrow{DN} = \frac{2}{1-k}\overrightarrow{MB} - \frac{2k}{1-k}\overrightarrow{NC} \quad (3)$$

- Với vectơ $\overrightarrow{JK}$, bằng cách chứng minh tương tự ta cũng có:

$$\overrightarrow{JK} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{MB} - \frac{k}{1-k}\overrightarrow{NC} = \frac{2}{1-k}\overrightarrow{MB} - \frac{k}{1-k}\overrightarrow{NC}. \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra:

$\vec{IJ} = 2\vec{JK} \Leftrightarrow$ I, J, K thẳng hàng.

Cách 2: Ta lần lượt sử dụng các giả thiết với một điểm O bất kì:

$$\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM} = -2\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}\right)$$

Tương tự, ta cũng có:

$$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OD} + 2\overrightarrow{OC}\right), \qquad \overrightarrow{OI} = \frac{1}{1-k}\left(\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OD}\right),$$

$$\overrightarrow{OJ} = \frac{1}{1-k}\left(\overrightarrow{OM} - k\overrightarrow{ON}\right), \qquad \overrightarrow{OK} = \frac{1}{1-k}\left(\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OC}\right).$$

Từ đó, suy ra:

$$\overrightarrow{OJ} = \frac{1}{1-k}.\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - 2k\overrightarrow{OC} - k\overrightarrow{OD}\right)$$

$$= \frac{1}{3(1-k)}\left[(1-k)\overrightarrow{OI} + 2(1-k)\overrightarrow{OK}\right] = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OK}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{OI} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OK}$$

$\Leftrightarrow$ I, J, K thẳng hàng.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để thực hiện ví dụ trên:

a. Trong cách 1, chúng ta đã sử dụng hướng thứ 2 để thiết lập được điều kiện $\vec{IJ} = 2\vec{JK}$. Và câu hỏi thường được các em học sinh đặt ra ở đây là *"Vì sao lại nghĩ được như vậy ?"*, để trả lời chúng ta hãy bắt đầu như sau:
 - I, J, K sẽ thẳng hàng khi $\vec{IJ} = t\vec{JK}$ (hoặc $\vec{IJ} = t'\vec{IK}$) và để có được đẳng thức này nếu sử dụng phép tách chúng ta cần chèn thêm các điểm A, B, C, D, M, N (tức 6 điểm), khi đó sẽ nhận được một biểu thức vectơ rất phức tạp.
 - Với sự cần thiết của 6 điểm để đơn giản hoá chúng chia thành hai bộ (mỗi bộ ba điểm) tương ứng với các đẳng thức vectơ của giả thiết.

b. Trong cách 2, chúng ta đã sử dụng kết quả được trình bày ở phần chú ý.

Vấn đề 3: BIỂU DIỄN MỘT VECTƠ THÀNH TỔ HỢP VECTƠ

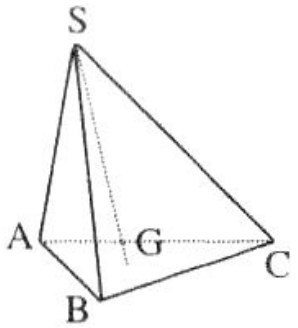
Phương pháp áp dụng

Ta lựa chọn một trong hai hướng:

Hướng 1: Từ giả thiết xác định được tính chất hình học, rồi từ đó khai triển vectơ cần biểu diễn bằng phương pháp xen điểm hoặc hiệu của hai vectơ cùng gốc.

Hướng 2: Từ giả thiết thiết lập được mối liên hệ vectơ giữa các đối tượng, rồi từ đó khai triển biểu thức này bằng phương pháp xen điểm hoặc hiệu của hai vectơ cùng gốc.

Ví dụ 1: *Cho hình chóp* SABC. *Đáy* ABC *có trọng tâm* G. *Hãy phân tích vectơ* $\overrightarrow{SA}$ *theo ba vectơ* $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SG}$, $\overrightarrow{BC}$.



Giải

Ta có:

$$\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{SG} + \overrightarrow{GA},$$
$$\overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SG} + \overrightarrow{GB},$$
$$\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SG} + \overrightarrow{GC},$$

Suy ra:

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = 3\overrightarrow{SG} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = 3\overrightarrow{SG}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{SA} = 3\overrightarrow{SG} - \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC} = 3\overrightarrow{SG} - \overrightarrow{SB} - (\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BC})$$
$$= 3\overrightarrow{SG} - 2\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{BC}.$$

Ví dụ 2: *Cho tứ diện* ABCD. *Gọi* A_1, B_1, C_1, D_1 *là các điểm thoả mãn:*

$$\overrightarrow{A_1A} = -2\overrightarrow{A_1B}, \qquad \overrightarrow{B_1B} = -2\overrightarrow{B_1C},$$
$$\overrightarrow{C_1C} = -2\overrightarrow{C_1D}, \qquad \overrightarrow{D_1D} = -2\overrightarrow{D_1A}.$$

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{j}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{k}$. *Hãy biểu diễn các vectơ* $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_1C_1}$, $\overrightarrow{A_1D_1}$ *theo ba vectơ* $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

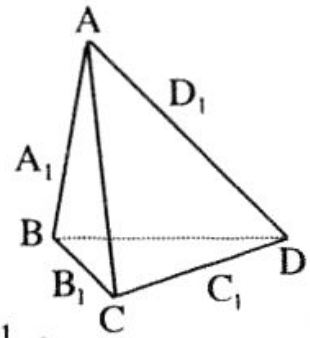
Giải

Ta lần lượt có:

$$\overrightarrow{A_1A} = -2\overrightarrow{A_1B} = -2(\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{A_1A} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\vec{i}.$$

$$\overrightarrow{B_1B} = -2\overrightarrow{B_1C} \Leftrightarrow \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AB} = -2(\overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AC})$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{B_1A} = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}) = -\frac{1}{3}(\vec{i} + 2\vec{j}).$$

$$\overrightarrow{C_1C} = -2\overrightarrow{C_1D}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{C_1A} + \overrightarrow{AC} = -2(\overrightarrow{C_1A} + \overrightarrow{AD})$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{C_1A} = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AD}) = -\frac{1}{3}(\vec{j} + 2\vec{k}).$$



$$-2\overrightarrow{D_1A} = \overrightarrow{D_1D} = \overrightarrow{D_1A} + \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{D_1A} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{3}\vec{k}.$$

Từ đó, ta lần lượt có:

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_1A} - \overrightarrow{B_1A} = -\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}(\vec{i} + 2\vec{j}) = -\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j}.$$

$$\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{A_1A} - \overrightarrow{C_1A} = -\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}(\vec{j} + 2\vec{k}) = -\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}.$$

$$\overrightarrow{A_1D_1} = \overrightarrow{A_1A} - \overrightarrow{D_1A} = -\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{k}.$$

Tổng quát hoá: Cho tứ diện ABCD. Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 là các điểm thoả mãn:

$$\overrightarrow{A_1A} = t\overrightarrow{A_1B},\ \overrightarrow{B_1B} = t\overrightarrow{B_1C},\ \overrightarrow{C_1C} = t\overrightarrow{C_1D},\ \overrightarrow{D_1D} = t\overrightarrow{D_1A}.$$

với $t \neq 0, 1$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{j}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{k}$. Hãy biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_1C_1}$, $\overrightarrow{A_1D_1}$ theo ba vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Bằng phương pháp tương tự như đã trình bày trong lời giải trên, chúng ta sẽ nhận được kết quả:

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \frac{1+t}{1-t}\vec{i} - \frac{t}{1-t}\vec{j}.$$

$$\overrightarrow{A_1C_1} = \frac{t}{1-t}\vec{i} + \frac{1}{1-t}\vec{j} - \frac{t}{1-t}\vec{k}.$$

$$\overrightarrow{A_1D_1} = \frac{t}{1-t}\vec{i} + \frac{1}{1-t}\vec{k}.$$

Vấn đề 4: XÉT TÍNH ĐỒNG PHẲNG, KHÔNG ĐỒNG PHẲNG CỦA BA VECTƠ

Phương pháp áp dụng

1. Để chứng minh ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng, ta đi chứng minh tồn tại cặp số thực m, n, sao cho:

$$\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}. \qquad (1)$$

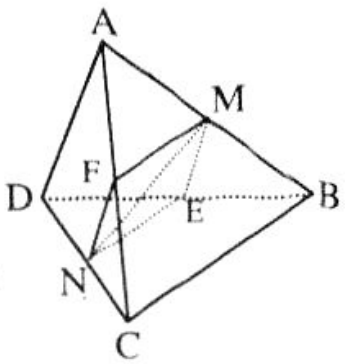
Chú ý: Trong trường hợp bài toán yêu cầu xác định điều kiện của tham số để ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng ta sẽ xuất phát từ điều kiện (1).

2. Để chứng minh ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng, ta đi chứng minh:

$$m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0} \Leftrightarrow m = n = p = 0.$$

Ví dụ 1: *Cho tứ diện* ABCD. *Gọi* M *và* N *theo thứ tự là trung điểm của* AB *và* CD. *Chứng minh rằng ba vectơ* $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AD}$ *đồng phẳng.*

Giải



Từ giả thiết, ta có:

$$1 = \frac{AM}{BM} = \frac{DN}{CN} \Rightarrow \frac{AM}{DN} = \frac{BM}{CN} = \frac{AB}{DC}$$

$\Rightarrow$ BC, MN, AD nằm trên ba mặt phẳng song song

$\Rightarrow$ ba vectơ $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AD}$ đồng phẳng.

Ví dụ 2: (Bài 5/tr 91 – Sgk): *Trong không gian cho* ΔABC.

a. *Chứng minh rằng nếu điểm* M *thuộc mặt phẳng* (ABC) *thì có ba số* x, y, z *mà* $x + y + z = 1$ *sao cho* $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ *với mọi điểm* O.

b. *Ngược lại, nếu có một điểm* O *trong không gian sao cho* $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$, *trong đó* $x + y + z = 1$ *thì điểm* M *thuộc mặt phẳng* (ABC).

✍ *Giải*

a. Với điểm M thuộc mặt phẳng (ABC) thì ba vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM}$ đồng phẳng, suy ra $\exists$ y, z sao cho:

$$\overrightarrow{AM} = y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = y(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + z(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (1 - y - z)\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$$

Đặt $x = 1 - y - z$ (tức là $x + y + z = 1$) thì ta được: $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$.

b. Ngược lại, ta biến đổi:

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC} = (1 - y - z)\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = y(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + z(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC} \Rightarrow \text{ba vectơ } \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM} \text{ đồng phẳng}$$
$$\Rightarrow M \in (ABC).$$

Ví dụ 3: *Cho tứ diện* OABC. *Ba điểm* M, N, P *trong không gian thoả mãn*:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC},$$
$$\overrightarrow{ON} = (t + 1)\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC},$$
$$\overrightarrow{OP} = (t - 2)\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}, t \in \mathbf{R}.$$

a. *Xác định* t *để ba vectơ* $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OP}$ *đồng phẳng.*

b. *Cho* $t = 0$, *hãy biểu diễn vectơ* $\vec{v} = 5\overrightarrow{OA} + 10\overrightarrow{OB} - 15\overrightarrow{OC}$ *theo ba vectơ* $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OP}$.

✍ *Giải*

a. Để $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OP}$ đồng phẳng điều kiện là tồn tại cặp số thực α, β, sao cho:

$$\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{ON} + \beta\overrightarrow{OP}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC} = \alpha[(t + 1)\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}] + \beta[(t - 2)\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}]$$
$$= \alpha(t + 1)\overrightarrow{OA} + [2\alpha + \beta(t - 2)]\overrightarrow{OB} + (\alpha + 2\beta)\overrightarrow{OC}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \alpha(t + 1) \\ t = 2\alpha + \beta(t - 2) \\ -2 = \alpha + 2\beta \end{cases} \Rightarrow 4t^2 + t - 10 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{161}}{8}.$$

Vậy, với $t = \frac{-1 \pm \sqrt{161}}{8}$ thì $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OP}$ đồng phẳng.

b. Với t = 0, ta được:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OC}, \quad (1)$$

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}, \quad (2)$$

$$\overrightarrow{OP} = -2\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}. \quad (3)$$

Giải hệ phương trình tạo bởi (1), (2), (3) theo các ẩn $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, ta được:

$$\overrightarrow{OA} = \frac{1}{5}(3\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON} + 2\overrightarrow{OP}),$$

$$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{10}(-2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON} - 3\overrightarrow{OP}),$$

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{5}(-\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}),$$

Suy ra:

$$\vec{v} = (3\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON} + 2\overrightarrow{OP}) + (-2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON} - 3\overrightarrow{OP}) - 3(-\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP})$$
$$= 4\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} - 4\overrightarrow{OP}.$$

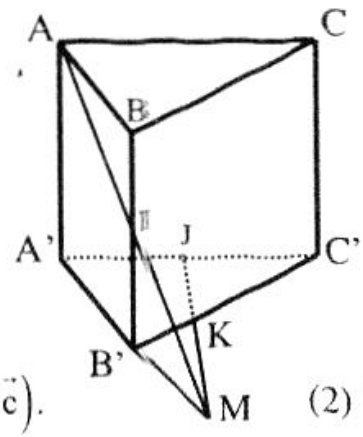
Vấn đề 5: CHỨNG MINH BỐN ĐIỂM ĐỒNG PHẲNG

Phương pháp áp dụng

Muốn chứng minh bốn điểm O, A, B, C đồng phẳng, ta đi chứng minh ba vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ đồng phẳng.

Ví dụ 1: (Bài 3/tr 114 – Sbt): *Cho hình lăng trụ* ABC.A'B'C'. *Gọi* I *và* J *lần lượt là trung điểm của* BB' *và* A'C'. *Điểm* K *thuộc* B'C' *sao cho* $\overrightarrow{KC'} = -2\overrightarrow{KB'}$. *Chứng minh rằng bốn điểm* A, I, J, K *cùng thuộc một mặt phẳng.*

Giải



Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AA'}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$.

Ta lần lượt có:

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB'}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(2\vec{b} + \vec{a}\right). \quad (1)$$

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC'}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\left(2\vec{a} + \vec{c}\right). \quad (2)$$

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{C'K} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{KC'}. \quad (3)$$

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'K} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{KB'}. \quad (4)$$

Từ (3) và (4), suy ra: $3\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AA'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\left(\vec{c} + 2\vec{b} + 3\vec{a}\right)$ (5)

ABC

Từ (1), (2) và (5), suy ra: $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AJ}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$ đồng phẳng.

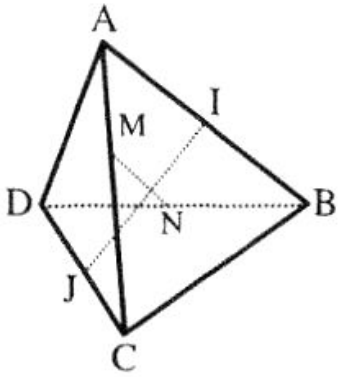
Vậy, bốn điểm A, I, J, K cùng thuộc một mặt phẳng.

☞ *Nhận xét*: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên để chứng minh bốn điểm A, I, J, K đồng phẳng chúng ta sử dụng điều kiện đã được nêu trong nội dung bài toán, đó là việc chứng minh ba vectơ $\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$ đồng phẳng. Tức là cần có:

$$\overrightarrow{AK}=\alpha\overrightarrow{AI}+\beta\overrightarrow{AJ} \text{ (hoặc } \alpha\overrightarrow{AI}+\beta\overrightarrow{AJ}+\gamma\overrightarrow{AK}=\vec{0}\text{)}$$

Và để tìm được đẳng thức trên chúng ta lựa chọn việc biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$ theo ba vectơ cơ sở $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ của hình hộp.

Ví dụ 2: *Cho tứ diện* ABCD; I, J *theo thứ tự là trung điểm của* AB, CD. Điểm M thuộc AC sao cho $\overrightarrow{MA}=k_1\overrightarrow{MC}$; N thuộc BD sao cho $\overrightarrow{NB}=k_2\overrightarrow{ND}$. *Chứng minh rằng bốn điểm* I, J, M, N *cùng thuộc một mặt phẳng khi và chỉ khi* $k_1=k_2$.



✍ *Giải*

Trước tiên, ta có ngay: $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\right)$.

Từ giả thiết $\overrightarrow{MA}=k_1\overrightarrow{MC}$, suy ra:

$$\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IM}=k_1\left(\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IM}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}=\frac{1}{1-k_1}\overrightarrow{IA}-\frac{k_1}{1-k_1}\overrightarrow{IC}.$$

Từ giả thiết $\overrightarrow{NB}=k_2\overrightarrow{ND}$, suy ra:

$$\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IN}=k_2\left(\overrightarrow{ID}-\overrightarrow{IN}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{IN}=\frac{1}{1-k_2}\overrightarrow{IB}-\frac{k_2}{1-k_2}\overrightarrow{ID}=-\frac{1}{1-k_2}\overrightarrow{IA}-\frac{k_2}{1-k_2}\overrightarrow{ID}.$$

Để các điểm I, J, M, N đồng phẳng điều kiện là:

$$\overrightarrow{IM}=p\overrightarrow{IN}+q\overrightarrow{IJ}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-k_1}\overrightarrow{IA}-\frac{k_1}{1-k_1}\overrightarrow{IC}=p\left(-\frac{1}{1-k_2}\overrightarrow{IA}-\frac{k_2}{1-k_2}\overrightarrow{ID}\right)+\frac{q}{2}\left(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1-k_1}+\frac{p}{1-k_2}\right)\overrightarrow{IA}-\left(\frac{k_1}{1-k_1}+\frac{q}{2}\right)\overrightarrow{IC}+\left(\frac{pk_2}{1-k_2}-\frac{q}{2}\right)\overrightarrow{ID}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{1-k_1}+\frac{p}{1-k_2}=0\\ \frac{k_1}{1-k_1}+\frac{q}{2}=0\\ \frac{pk_2}{1-k_2}-\frac{q}{2}=0\end{cases} \Leftrightarrow \frac{k_1}{1-k_1}=-\frac{pk_2}{1-k_2}=\frac{k_2}{1-k_1} \Rightarrow k_1=k_2, \text{ đpcm.}$$

Vấn đề 6: XÁC ĐỊNH ĐIỂM M THOẢ MÃN MỘT ĐẲNG THỨC VECTƠ CHO TRƯỚC

Phương pháp áp dụng

1. Ta biến đổi đẳng thức vectơ cho trước về dạng

$\overrightarrow{OM} = \vec{v}$, trong đó điểm O và vectơ $\vec{v}$ đã biết.

2. Nếu muốn dựng điểm M, ta lấy O làm gốc dựng một vectơ bằng vectơ $\vec{v}$, khi đó điểm ngọn của vectơ này chính là điểm M.

Ví dụ 1: *Cho hình hộp* $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.

a. *Chứng minh rằng* $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{A_1C} = 2\overrightarrow{AC}$.

b. *Xác định vị trí của điểm* O *sao cho*:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OD_1}=\vec{0}.$$

c. *Chứng minh rằng khi đó với mọi điểm* M *trong không gian ta luôn có*:

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MB_1}+\overrightarrow{MC_1}+\overrightarrow{MD_1}=8\overrightarrow{MO}.$$

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{A_1C} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC_1}) + (\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AC}) = 2\overrightarrow{AC}.$$

b. Gọi O là giao điểm của AC_1 và A_1C, ta có ngay:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OD_1}$$
$$= (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC_1}) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD_1}) + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA_1}) + (\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB_1}) = \vec{0}.$$

c. Ta có:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MD_1}$$
$$= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD})$$
$$+ (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_1}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB_1}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC_1}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD_1})$$
$$= 8\overrightarrow{MO}.$$

Vấn đề 7: TÌM QUỸ TÍCH ĐIỂM M THOẢ MÃN ĐIỀU KIỆN K

Phương pháp áp dụng

Với các bài toán quỹ tích ta cần nhớ rằng:

1. Nếu $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$, với A, B cho trước thì M thuộc mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

2. $|\overrightarrow{MC}| = k|\overrightarrow{AB}|$, với A, B, C cho trước thì M thuộc mặt cầu tâm C, bán kính bằng k.AB.

3. Nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{BC}$, với A, B, C cho trước thì
 - Với $k \in \mathbf{R}$ điểm M thuộc đường thẳng qua A song song với BC.
 - Với $k \in \mathbf{R}^+$ điểm M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC theo hướng $\overrightarrow{BC}$.
 - Với $k \in \mathbf{R}^-$ điểm M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC ngược hướng $\overrightarrow{BC}$.

Ví dụ 1: *Trong không gian, cho ba điểm* A, B, C *cố định không thẳng hàng, tìm tập hợp các điểm* M *sao cho:*

$$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|. \quad (1)$$

Giải

Gọi G là trọng tâm ΔABC, ta biến đổi được (1) về dạng:

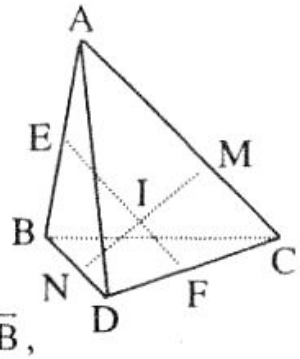
$$|3\overrightarrow{MG}| = |3\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MG}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MG}| = |\overrightarrow{GA}|$$

$\Leftrightarrow$ M thuộc mặt cầu tâm G, bán kính GA.

Ví dụ 2: *Cho tứ diện* ABCD, *hai điểm* M, N *thoả mãn:*

$$\overrightarrow{MA} + t\overrightarrow{MC} = \vec{0},\ \overrightarrow{NB} + t\overrightarrow{ND} = \vec{0}.$$

Chứng tỏ rằng khi t *thay đổi thì trung điểm* I *của* MN *di chuyển trên một đường thẳng cố định.*



Giải

Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB và CD, ta có:

$$2\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{IN} + \overrightarrow{NB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{NB},$$

$$2\overrightarrow{IF} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{IN} + \overrightarrow{ND} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ND},$$

Suy ra: $2(\overrightarrow{IE} + t\overrightarrow{IF}) = \overrightarrow{MA} + t\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{NB} + t\overrightarrow{ND} = \vec{0} \Leftrightarrow I \in EF$.

Vậy, khi t thay đổi thì trung điểm I của MN di chuyển trên đường thẳng EF

Vấn đề 8: SỬ DỤNG VECTƠ ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN ĐỊNH TÍNH

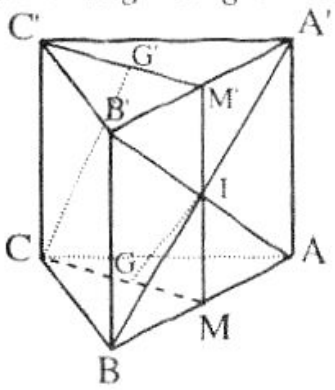
Phương pháp áp dụng

Ta có các kết quả:

- Nếu $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$, với $k \neq 0$ thì AB // CD hoặc A, B, C, D thẳng hàng.
 Trong trường hợp AB // CD $\in$ (P) suy ra AB // (P).
 Đặc biệt nếu $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB}$ (hoặc $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$) thì M là trung điểm của AB. Trong nhiều trường hợp bài toán được phát biểu dưới dạng "Chứng minh rằng đường thẳng a đi qua trung điểm của một đoạn thẳng".
- Nếu $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$ thì AB $\perp$ CD.
- Điểm G là trọng tâm tứ diện ABCD khi:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}.$$

Ví dụ 1: (Bài 3/tr 91 – Sgk): *Cho hình lăng trụ tam giác* ABC.A'B'C'. *Gọi* G *và* G' *lần lượt là trọng tâm của* ΔABC *và* ΔA'B'C', I *là giao điểm của hai đường thẳng* AB' *và* A'B. *Chứng minh rằng các đường thẳng* GI *và* CG' *song song với nhau.*



Giải

Gọi M, M' theo thứ tự là trung điểm của AB và A'B', ta có nhận xét:

$$\overrightarrow{CG'} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'G'} = 2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{CG}$$

$$= 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{GM} = 2(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MI}) = 2\overrightarrow{GI}$$

$\Rightarrow$ CG' // GI, đpcm.

☞ ***Chú ý***: Thông thường để chuẩn hoá chúng ta thực hiện như sau:

- Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AA'}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$.
- Tìm cách biểu diễn $\overrightarrow{CG'}$ và $\overrightarrow{GI}$ theo ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.
- Từ đó, suy ra:

$$\overrightarrow{CG'} = m\overrightarrow{GI} \Rightarrow CG' // GI, \text{ đpcm.}$$

Cụ thể, trong bài toán này, ta có:

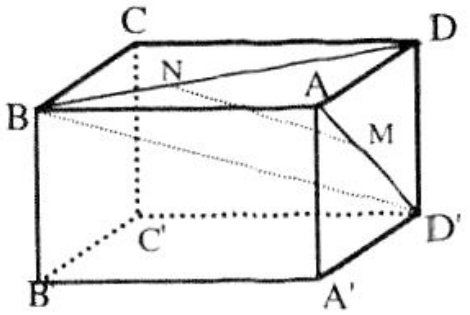
$$\overrightarrow{CG'} = \frac{1}{3}(3\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}) \quad \text{và} \quad \overrightarrow{GI} = \frac{1}{6}(3\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CG'} = 2\overrightarrow{GI} \Rightarrow CG' // GI, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 2: (Bài 7/tr 114 – Sbt): *Cho hình lập phương* ABCD.A'B'C'D'. *Gọi* M, N *lần lượt là các điểm thuộc* AD' *và* DB *sao cho* $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MD'}$, $\overrightarrow{ND} = k\overrightarrow{NB}$ $(k \neq 0, k \neq 1)$.

a. *Chứng minh rằng* MN *song song với mặt phẳng* (A'BC).

b. *Khi* MN *và* A'C *song song với nhau. Chứng tỏ rằng* MN *vuông góc với* AD' *và* DB.



Giải

a. Ta có các cách trình bày sau:

Cách 1: Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AA'}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$.

Sử dụng công thức tích vô hướng lần lượt có:

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a} = 0, \qquad \vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2.$$

Từ giả thiết:

$$\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MD'} = k\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD'}\right) = k\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{k}{k-1}\left(\vec{a} + \vec{c}\right)$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có $\overrightarrow{AN} = -\frac{k}{k-1}\vec{b} - \frac{1}{k-1}\vec{c}$.

Suy ra:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = -\frac{k}{k-1}\vec{b} - \frac{1}{k-1}\vec{c} - \frac{k}{k-1}\left(\vec{a}+\vec{c}\right) = \frac{1+k}{1-k}\vec{c} + \frac{k}{1-k}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$$

$$= \frac{1+k}{1-k}\overrightarrow{BC} + \frac{k}{1-k}\overrightarrow{BA'}$$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA'}$ đồng phẳng .

Ngoài ra vì $M \in AD'$ và $N \in BD$ nên $MN \notin (A'BC)$.

Vậy, ta được MN song song với mặt phẳng (A'BC).

Cách 2: Từ giả thiết $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MD'}$, $\overrightarrow{ND} = k\overrightarrow{NB}$ $(k \neq 0, k \neq 1)$, suy ra:

$$\frac{AM}{MD'} = \frac{DN}{NB} \Leftrightarrow AD, MN, D'B \text{ theo thứ tự thuộc ba mặt phẳng song song}$$

$\Rightarrow MN // (A'BCD') \Rightarrow MN // (A'BC)$, đpcm.

b. Để MN và A'C song song với nhau điều kiện là:

$$\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{A'C} \Leftrightarrow \frac{1+k}{1-k}\vec{c} + \frac{k}{1-k}\left(\vec{a}-\vec{b}\right) = m\left(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{1-k}\vec{a} - \frac{k}{1-k}\vec{b} + \frac{1+k}{1-k}\vec{c} = -m\vec{a} + m\vec{b} + m\vec{c}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{k}{1-k} = -m \\ -\dfrac{k}{1-k} = m \\ \dfrac{1+k}{1-k} = m \end{cases} \Rightarrow -k = 1+k \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}.$$

Khi đó, ta được $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}\left(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}\right)$ và do đó:

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{MN}.\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}\right) = -\frac{1}{3}\left(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}\right)\left(\vec{a}+\vec{c}\right) = 0 \Leftrightarrow MN \perp AD'.$$

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{MN}.\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}\right) = -\frac{1}{3}\left(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}\right)\left(\vec{b}-\vec{c}\right) = 0 \Leftrightarrow MN \perp DB.$$

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên:

a. ***Ở câu*** **a)**, vì không tồn tại một đường thẳng trong mặt phẳng (A'BC) song song với MN nên chúng ta không thể sử dụng phương pháp thông thường để chứng minh MN song song với mặt phẳng (A'BC). Và ở đây:

- Trong cách 1, các em có thể hiểu như sau:
 Nếu ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng và:
 $\vec{a}, \vec{b}$ là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (P)
 $\overrightarrow{MN} = k\vec{c}$, $M \notin (P)$, $N \notin (P)$
 thì MN song song với mặt phẳng (P).
- Trong cách 2, chúng ta đã sử dụng kết quả của định lí Ta–lét trong không gian. Và đó là lời giải tối ưu nhất.

b. ***Ở câu* b)**, các em học sinh cần biết sử dụng điều kiện MN song song với A'C để tìm giá trị của k, từ đó suy ra cách biểu diễn cho vectơ $\overrightarrow{MN}$.
Các em học sinh cũng có thể sử dụng điều kiện đồng phẳng của các điểm M, N, A', C để tìm được k.

Ví dụ 3: *Cho hình chóp* S.ABCD. *Gọi* D_1, D_2, D_3 *lần lượt là điểm đối xứng của điểm* D' *qua* A, B' C. *Chứng minh rằng* B *là trọng tâm của tứ diện* $D_1D_2D_3D'$.

✍ *Giải – Bạn đọc tự vẽ hình*

Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AA'}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$.

Ta có ngay: $\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Từ giả thiết suy ra A là trung điểm của D_1D' nên:

$$\overrightarrow{BD_1} + \overrightarrow{BD'} = 2\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{BD_1} = 2\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BD'} = -\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}.$$

Lập luận tương tự, ta cũng có $\overrightarrow{BD_2} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, $\overrightarrow{BD_3} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Từ đó, suy ra:

$$\overrightarrow{BD_1} + \overrightarrow{BD_2} + \overrightarrow{BD_3} + \overrightarrow{BD'} = \vec{0} \Leftrightarrow$$ B là trọng tâm tứ diện $D_1D_2D_3D'$.

Cách 2: Ta lần lượt:

- Gọi I là giao điểm của BD' với mặt phẳng (AB'C) thì D'I = 2IB và I là trọng tâm $\Delta AB'C$.
- Gọi J là giao điểm của BD' với mặt phẳng $(D_1D_2D_3)$ thì vì D_1, D_2, D_3 lần lượt là điểm đối xứng của điểm D' qua A, B' C nên:
 $(D_1D_2D_3) // (AB'C) \Rightarrow$ J là trọng tâm $\Delta D_1D_2D_3$.
 $IJ = ID' \Rightarrow D'B = \frac{3}{4}D'J \Rightarrow$ B là trọng tâm tứ diện $D_1D_2D_3D'$.

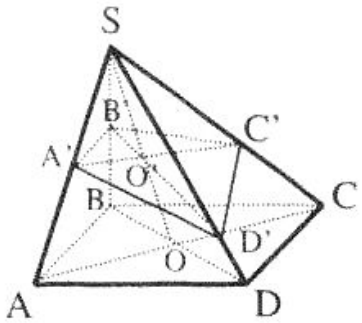
☞ ***Nhận xét***: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên:

a. ***Ở cách 1***, chúng ta sử dụng điều kiện đã được nêu trong nội dung bài toán để chứng minh B là trọng tâm tứ diện $D_1D_2D_3D'$. Và ở cách này chúng ta lựa chọn việc biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{BD_1}$, $\overrightarrow{BD_2}$, $\overrightarrow{BD_3}$, $\overrightarrow{BD'}$ theo ba vectơ cơ sở $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ của hình hộp.

b. *Ở cách 2*, chúng ta sử dụng định nghĩa về trọng tâm của một tứ diện.

Ví dụ 2: *Cho hình chóp* S.ABCD *có đáy là hình bình hành. Một mặt phẳng* (P) *bất kì không đi qua* S, *cắt các cạnh* SA, SB, SC, SD *lần lượt tại các điểm* A', B', C', D'. *Chứng minh rằng:*

$$\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}=\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'}.$$



Giải

Giả sử AC cắt BD tại O và A'C' cắt B'D' tại O'.

Đặt:

$$\overrightarrow{SA}=a\overrightarrow{SA'},\ \overrightarrow{SB}=b\overrightarrow{SB'},\ \overrightarrow{SC}=c\overrightarrow{SC'},\ \overrightarrow{SD}=d\overrightarrow{SD'}.$$

Khi đó: $\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}=a+c,\ \frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'}=b+d.$

Ta lần lượt có: $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SO}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}\ \Leftrightarrow \overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SB}.$

$$\overrightarrow{SD'}=\frac{1}{d}\overrightarrow{SD}=\frac{1}{d}\left(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SB}\right)=\frac{1}{d}\left(a\overrightarrow{SA'}+c\overrightarrow{SC'}-b\overrightarrow{SB'}\right)$$

$$=\frac{a}{d}\overrightarrow{SA'}+\frac{c}{d}\overrightarrow{SC'}-\frac{b}{d}\overrightarrow{SB'}. \qquad (*)$$

Và vì các điểm A', B', C', D' thẳng hàng nên từ (*) suy ra:

$$\frac{a}{d}+\frac{c}{d}-\frac{b}{d}=1\Leftrightarrow a+c-b=d\Leftrightarrow a+c=b+d\Rightarrow\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}=\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'}.$$

Ví dụ 3: (Bài 4/tr 91 – Sgk): *Cho hình hộp* ABCD.A'B'C'D'. *Gọi* M *và* N *lần lượt là trung điểm của* CD *và* DD'; G *và* G' *lần lượt là trọng tâm của các tứ diện* A'D'MN *và* BCC'D'. *Chứng minh rằng đường thẳng* GG' *và mặt phẳng* (ABB'A') *song song với nhau.*

Giải

Trước tiên, ta đi chứng minh mệnh đề "Điểm G là trọng tâm của tứ diện ABCD, ta luôn có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$, với mọi điểm M", thật vậy:

Gọi I và J theo thứ tự là trung điểm của AB và CD, sử dụng quy tắc ba điểm bằng cách xen vào giữa, ta lần lượt có:

$$\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA},\quad \overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB},$$
$$\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC},\quad \overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GD},$$

Suy ra:

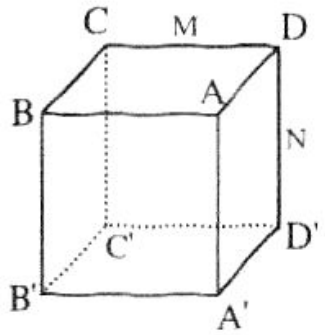
$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=4\overrightarrow{MG},\ \text{đpcm.}$$

Trở lại bài toán, đặt $\vec{a}=\overrightarrow{AB},\ \vec{b}=\overrightarrow{AD},\ \vec{c}=\overrightarrow{AA'}$.

Trước tiên, ta luôn có: $\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{AG'}-\overrightarrow{AG}.$ (1)

- Vì G là trọng tâm tứ diện A'D'MN nên:

$$4\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$$
$$= \overrightarrow{AA'} + (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM}) + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN})$$
$$= \vec{c} + \vec{c} + \vec{b} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$
$$= \frac{1}{2}\vec{a} + 3\vec{b} + \frac{5}{2}\vec{c}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{8}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} + \frac{5}{8}\vec{c}. \qquad (2)$$



- Vì G' là trọng tâm tứ diện BCC'D' nên:

$$4\overrightarrow{AG'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD'}$$
$$= \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}) + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'})$$
$$= \vec{a} + \vec{a} + \vec{b} + \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{b} + \vec{c} = 3\vec{a} + 3\vec{b} + 2\vec{c}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG'} = \frac{3}{2}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}. \qquad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$\overrightarrow{GG'} = (\frac{3}{2}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}) - (\frac{1}{8}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} + \frac{5}{8}\vec{c}) = \frac{5}{8}\vec{a} - \frac{1}{8}\vec{c}$$

$\Rightarrow$ Bộ ba vectơ $\overrightarrow{GG'}$, $\vec{a}$ và $\vec{c}$ đồng phẳng $\Rightarrow$ GG' // (ABB'A'), đpcm.

Vấn đề 9: SỬ DỤNG VECTƠ ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN ĐỊNH LƯỢNG

Phương pháp áp dụng

Ta có các kết quả:

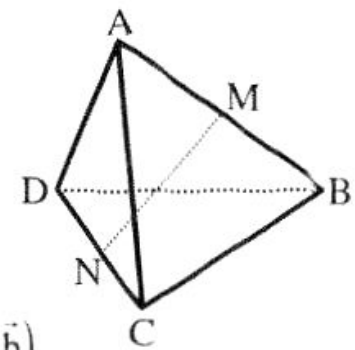
- $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2$.
- Sử dụng công thức tích vô hướng để tính góc giữa hai đường thẳng, giữa đường thẳng và mặt phẳng, giữa hai mặt phẳng.

Ví dụ 1: *Cho tứ diện* ABCD, *có tất cả các cạnh bằng* m. *Các điểm* M, N *theo thứ tự là trung điểm của* AB, CD.

a. *Tính độ dài* MN.

b. *Tính góc giữa đường thẳng* MN *với các đường thẳng* AB, CD *và* BC.

Giải



Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$.

Sử dụng công thức tích vô hướng lần lượt có:

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a} = \frac{1}{2}m^2, \quad \vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2 = m^2.$$

a. Vì M, N là trung điểm của AB, CD nên:

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{c} - \vec{b}\right)$$

ABC

$$\Rightarrow MN^2 = \overline{MN}^2 = \frac{1}{4}\left(\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}\right)^2 = \frac{m^2}{2} \Leftrightarrow MN = \frac{m\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy, ta được $MN = \frac{m\sqrt{2}}{2}$.

b. Ta lần lượt:

- Góc giữa MN và AB, được xác định:

$$\overline{MN}.\overline{AB} = \frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}\right)\vec{b} = \frac{1}{2}\left(\vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{c}-\vec{b}^2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overline{MN} \perp \overline{AB} \Leftrightarrow MN \perp AB.$$

Vậy, giữa MN và AB bằng 90^0.

- Góc giữa MN và CD, được xác định:

$$\overline{MN}.\overline{CD} = \overline{MN}.\left(\overline{AD}-\overline{AC}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{c}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overline{MN} \perp \overline{CD} \Leftrightarrow MN \perp CD.$$

Vậy, giữa MN và CD bằng 90^0.

- Góc giữa MN và BC, được xác định:

$$\overline{MN}.\overline{BC} = \overline{MN}.\left(\overline{AC}-\overline{AB}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}\right)\left(\vec{c}-\vec{b}\right) = \frac{1}{2}m^2$$

$$\Rightarrow \cos\left(\overline{MN}, \overline{BC}\right) = \frac{\overline{MN}.\overline{BC}}{\left|\overline{MN}\right|.\left|\overline{BC}\right|} = \frac{\frac{1}{2}m^2}{m.\frac{m\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left(\overline{MN}, \overline{BC}\right) = 45^0.$$

Vậy, giữa MN và BC bằng 45^0.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên:

a. ***Ở câu*** **a)**, chúng ta tìm cách biểu diễn vectơ $\overline{MN}$ theo ba vectơ cơ sở $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ của hình tứ diện (trong trường hợp này nó là tứ diện đều nên có các góc ở đỉnh A bằng 60^0).

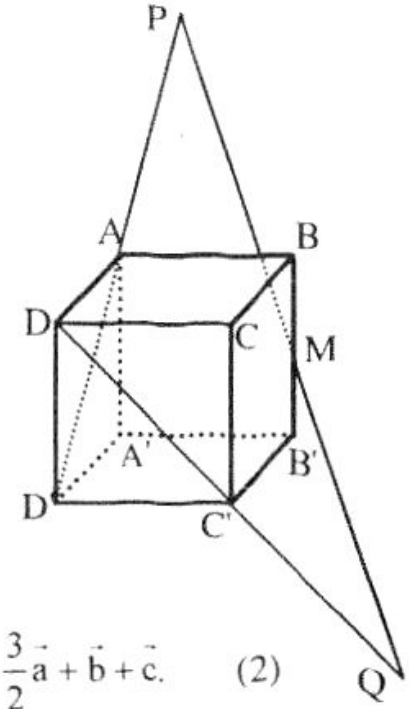
b. ***Ở câu*** **b)**, chúng ta sử dụng kết quả:

$$\vec{a}.\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}$$

với lưu ý số đo của góc giữa hai đường thẳng luôn nhỏ hơn hay bằng 90^0.

Ví dụ 2: (Bài 5/tr 114 – Sbt): *Cho hình chóp* S.ABCD *có các cạnh bằng* m, *các góc tại* A *bằng* 60^0 ($\widehat{BAD} = \widehat{BAA'} = \widehat{A'AD} = 60^0$). *Gọi* P, Q *là các điểm xác định bởi* $\overline{AP} = \overline{D'A}, \overline{C'Q} = \overline{DC'}$. *Chứng minh rằng đường thẳng* PQ *đi qua trung điểm của cạnh* BB'. *Tính độ dài đoạn thẳng* PQ.

Giải



Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AA'}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$.

a. Sử dụng công thức tích vô hướng lần lượt có:

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a} = \frac{1}{2}m^2, \qquad \vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2 = m^2.$$

Gọi M là trung điểm của BB', ta có:

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{D'A}$$
$$= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{D'D} + \overrightarrow{D'A}$$
$$= -\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} - \vec{a} - \vec{c} = -\frac{3}{2}\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}. \qquad (1)$$

Mặt khác, ta cũng có :

$$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'Q} = \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DC'}$$
$$= \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{B'C'} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD'} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c} + \vec{b} + \vec{a} = \frac{3}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{MP} = -\overrightarrow{MQ} \Leftrightarrow$ M, P, Q thẳng hàng.

Vậy, đường thẳng PQ đi qua trung điểm M của cạnh BB'.

b. Ta có: $PQ^2 = \overrightarrow{PQ}^2 = 4\overrightarrow{MQ}^2 = 4(\frac{3}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 = \left(3\vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{c}\right)^2$

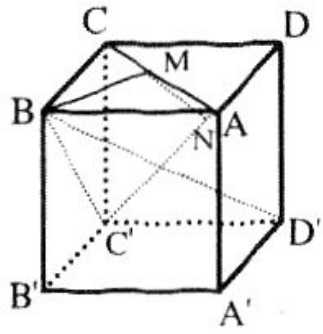
$$= 9\vec{a}^2 + 4\vec{b}^2 + 4\vec{c}^2 + 12\vec{a}\vec{b} + 8\vec{b}\vec{c} + 12\vec{a}\vec{c}$$
$$= 9m^2 + 4m^2 + 4m^2 + 12.\frac{1}{2}m^2 + 8.\frac{1}{2}m^2 + 12.\frac{1}{2}m^2 = 33m^2.$$

$\Rightarrow PQ = m\sqrt{33}$.

Vậy, ta được $PQ = m\sqrt{33}$.

Ví dụ 3: (Bài 2/tr 114 – Sbt): *Cho hình hộp* ABCD.A'B'C'D'. *Các điểm* M, N *lần lượt thuộc các đường thẳng* CA *và* DC' *sao cho* $\overrightarrow{MC} = m\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{ND} = m\overrightarrow{NC'}$. *Xác định* m *để các đường thẳng* MN *và* BD' *song song với nhau. Khi ấy, tính* MN *biết* $\widehat{ABC} = \widehat{ABB'} = \widehat{CBB'} = 60^0$ *và* BA = a, BB' = b, BC = c.

Giải



Để tiện trình bày ta kí hiệu $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BB'} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$.

a. Ta có ngay:

$$\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{CD'} = \vec{b} + \vec{c} + \vec{a}.$$

Khi đó, để MN song song với BD' điều kiện là:

$$\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{BD'} = k\vec{a} + k\vec{b} + k\vec{c}. \qquad (*)$$

Từ giải thiết $\overrightarrow{MC} = m\overrightarrow{MA}$, ta có:

$$\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM} = m\left(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BN}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = \frac{1}{1-m}\left(\overrightarrow{BC} - m\overrightarrow{BA}\right) = \frac{1}{1-m}\left(\vec{c} - m\vec{a}\right).$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có:

$$\overrightarrow{BN} = \frac{1}{1-m}\left(\overrightarrow{BD} - m\overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{1-m}\left[\vec{a} + \vec{c} - m\left(\vec{b} + \vec{c}\right)\right] = \frac{1}{1-m}\vec{a} - \frac{m}{1-m}\vec{b} + \vec{c}.$$

Khi đó:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM} = \frac{1}{1-m}\vec{a} - \frac{m}{1-m}\vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{1-m}\left(\vec{c} - m\vec{a}\right)$$

$$= \frac{1+m}{1-m}\vec{a} - \frac{m}{1-m}\vec{b} - \frac{m}{1-m}\vec{c}.$$

Từ điều kiện (*) suy ra: $k = \frac{1+m}{1-m} = -\frac{m}{1-m} \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$ và $k = \frac{1}{3}$.

b. Từ kết quả trên , ta được:

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MN}^2 = \frac{1}{9}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)^2 = \frac{1}{9}\left(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + 2\vec{b}\vec{c} + 2\vec{a}\vec{c}\right)$$

$$= \frac{1}{9}\left(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac\right)$$

$$\Leftrightarrow MN = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac}.$$

Ví dụ 4: *Cho ba tia* Ox, Oy, Oz *không đồng phẳng.*

a. *Đặt* $\widehat{xOy} = \alpha$, $\widehat{yOz} = \beta$, $\widehat{zOx} = \gamma$. *Chứng minh rằng:*

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma > -\frac{3}{2}.$$

b. *Gọi* Ox_1, Oy_1, Oz_1 *lần lượt là các tia phân giác của các góc* xOy, yOZ, zOx. *Chứng minh rằng nếu* Ox_1 *và* Oy_1 *vuông góc với nhau thì* Oz_1 *vuông góc với cả* Ox_1 *và* Oy_1.

Giải

Lấy các điểm A, B, C lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz sao cho OA = OB = OC.

Đặt $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$.

a. Từ điều kiện Ox, Oy, Oz không đồng phẳng, suy ra:

$$\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)^2 > 0 \Leftrightarrow \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\left(\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a}\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow 3OA^2 + 2OA^2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) > 0 \Rightarrow \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma > -\frac{3}{2}.$$

b. Nhận xét rằng:

- Vectơ $\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$ có giá song song với Oz.
- Vectơ $\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$ có giá song song với Ox.
- Vectơ $\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}\right)$ có giá song song với Oy.

Từ giả thiết Ox_1 và Oy_1 vuông góc với nhau, ta có:

$$\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}^2=0.$$

Khi đó, ta lần lượt có:

$$\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\right)=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA}^2=0$$

$\Leftrightarrow Oz_1$ vuông góc với cả Ox_1.

$$\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\right)=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}^2=0$$

$\Leftrightarrow Oz_1$ vuông góc với cả Oy_1.

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài tập 1: Cho tứ diện ABCD.

a. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AC, BD. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{IJ}.$$

b. Gọi E, F là hai điểm thoả mãn $\overrightarrow{EA}=t\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{FC}=t\overrightarrow{FD}$, với $t\neq 0, 1$. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AC}=t\overrightarrow{BD}+(1-t)\overrightarrow{EF}.$$

Bài tập 2: Trong không gian cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ khác vectơ–không.

a. Nếu có $\vec{a}-3\vec{b}+2\vec{c}=\vec{0}$ thì ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ có đồng phẳng không ?

b. Giả sử $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$, trong đó m, n, p là các số thực. Với điều kiện nào của m, n, p thì ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

Bài tập 3: Cho hình lập phương ABCD.EFGH có cạnh bằng a. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}$

Bài tập 4: Cho tứ diện ABCD. Gọi E là trọng tâm ΔBCD, I, I_1, J, J_1, K, K_1 theo thứ tự là trung điểm của AB, CD, CA, BD, AD, BC. Điểm G thoả mãn hệ thức $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$. Chứng minh rằng:

a. $\overrightarrow{II_1}+\overrightarrow{JJ_1}+\overrightarrow{KK_1}=2\overrightarrow{AG}$.

b. $\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GE}=\vec{0}$.

Bài tập 5: Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J, H, K, E, F là trung điểm của các cạnh AB, CD, BC, AD, AC, BD. Chứng minh rằng:

$$AB^2+CD^2+AC^2+BD^2+BC^2+AD^2=4(IJ^2+HK^2+EF^2).$$

Bài tập 6: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$, gọi I là giao điểm của AC_1 với mặt phẳng (BDA_1). Chứng minh rằng:

a. $\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{A_1C}=2\overrightarrow{AC}$.

b. $\overrightarrow{AC_1}-\overrightarrow{A_1C}=2\overrightarrow{CC_1}$.

c. $\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{KA_1}=\vec{0}$.

Bài tập 7: Cho tứ diện OABC, đặt:

$$\vec{a}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}, \qquad \vec{b}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC},$$

$$\vec{c}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+t^2\overrightarrow{OC}.$$

Xác định t để ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

Bài tập 8: Trong không gian, cho bốn điểm A, B, C, D trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. O là điểm bất kỳ, Chứng minh rằng 4 điểm A, B, C, D đồng phẳng khi và chỉ khi tồn tại bốn số $\alpha, \beta, \gamma, \eta$ sao cho:

$$\begin{cases} \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} + \eta\overrightarrow{OD} = \vec{0} \\ \alpha + \beta + \gamma + \eta = 0 \end{cases}.$$

Bài tập 9: Cho tứ diện OABC, gọi A_1, B_1, C_1, D_1 là các điểm thuộc AB, BC, CD, DA sao cho:

$$\frac{\overrightarrow{AA_1}}{\overrightarrow{A_1B}} = \frac{\overrightarrow{BB_1}}{\overrightarrow{B_1C}} = \frac{\overrightarrow{CC_1}}{\overrightarrow{C_1D}} = \frac{\overrightarrow{DD_1}}{\overrightarrow{D_1A}} = t.$$

a. Chứng minh rằng với điểm O bất kỳ trong không gian ta luôn có:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OD_1}.$$

b. Xác định giá trị của t để bốn điểm A_1, B_1, C_1, D_1 đồng phẳng.

Bài tập 10: Cho tứ diện ABCD, gọi G là trọng tâm ΔABC, đặt $\overrightarrow{DA} = \vec{i}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{j}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{k}$. Hãy biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{GC}$ theo ba vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Bài tập 11: Cho tứ diện vuông OABC, vuông tại O và OA = OB = OC. Điểm M thoả mãn $|\overrightarrow{OM}| = OA$, nửa đường thẳng OM tạo với tia OC một góc bằng 45^0 và tạo với hai tia OA, OB thành hai góc nhọn bằng nhau. Hãy phân tích vectơ $\overrightarrow{OM}$ theo ba vectơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

Bài tập 12: Cho hình chóp S.ABC. Lấy các điểm A_1, B_1, C_1 lần lượt thuộc các tia SA, SB, SC sao cho $SA = aSA_1$, $SB = aSB_1$, $SC = aSC_1$, trong đó a, b, c là các số thay đổi. Tìm điều kiện của a, b, c để mặt phẳng $(A_1B_1C_1)$ đi qua trọng tâm của ΔABC.

Bài tập 13: Cho tứ diện ABCD. Lấy các điểm M, N, P, Q theo thứ tự thuộc AB, BC, CD, DA sao cho $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DP} = k\overrightarrow{DC}$. Xác định k để bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng.

Bài tập 14: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Một đường thẳng (Δ) cắt các đường thẳng AA', BC, C'D' lần lượt tại M, N, P sao cho $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{NP}$. Tính $\frac{MA}{MA'}$.

Bài tập 15: Trong không gian, cho ba điểm A, B, C cố định không thẳng hàng, M là điểm di động.

a. Chứng minh rằng vectơ $\vec{v} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$ là một vectơ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

b. M_0 là điểm thoả mãn $\overrightarrow{AM_0} = \vec{v}$ và giả sử đường thẳng AM_0 cắt BC tại N. Chứng minh rằng $\overrightarrow{NB} = 3\overrightarrow{NC}$.

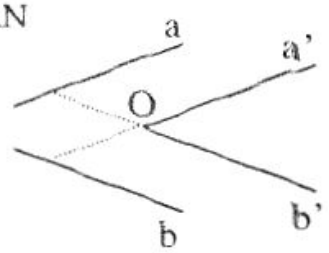
c. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC và vuông góc với $\vec{v}$. Chứng tỏ rằng khi M di chuyển trong mặt phẳng (P) thì tổng sau có giá trị không đổi:

$$S = 2MA^2 + MB^2 - 3MC^2.$$

CHỦ ĐỀ 2 HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG BẤT KÌ TRONG KHÔNG GIAN



Định nghĩa 1: *Góc giữa hai đường thẳng a, b là góc giữa hai đường thẳng a', b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với a và b.*

☞ ***Chú ý***:

1. Để xác định góc (a, b) ta có thể lấy điểm O nằm ngay trên một trong hai đường thẳng đó.
2. Nếu $\vec{u}$, $\vec{v}$ theo thứ tự là các vectơ chỉ phương của các đường thẳng a, b và $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha$ thì góc giữa hai đường thẳng a và b bằng α hoặc $180^0 - \alpha$ tuỳ theo $\alpha \le 90^0$ hoặc $\alpha > 90^0$.

2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

Định nghĩa 2: *Hai đường thẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^0.*

☞ ***Nhận xét***: Cho hai đường thẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với đường thẳng thứ nhất thì vuông góc với đường thẳng thứ hai.
Tức là:

$$\begin{cases} a // b \\ c \perp a \end{cases} \Rightarrow c \perp b.$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: TÍNH GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

Phương pháp áp dụng

Để tính góc giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b, ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: *Tìm góc* bằng việc lấy một điểm O nào đó (thông thường $O \in a$ hoặc $O \in b$). Qua O dựng a' và b' theo thứ tự song song với a và b.
Khi đó, góc a'và b' là góc giữa a và b.

Bước 2: *Tính góc*: Sử dụng tỷ số lượng giác của góc trong tam giác vuông hoặc dùng định lí hàm số côsin trong tam giác thường để xác định số đo góc giữa a' và b'.

Cách 2: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ theo thứ tự là các vectơ chỉ phương của các đường thẳng a, b

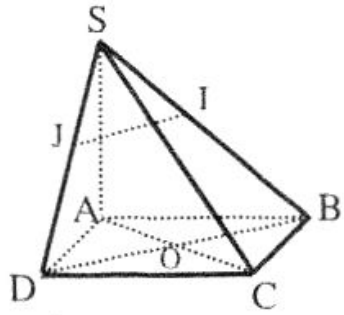
Bước 2: Tính số đo của $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha$ sử dụng tích vô hướng.

Bước 3: Khi đó, góc giữa hai đường thẳng a và b bằng α hoặc $180^0 - \alpha$ tuỳ theo $\alpha \le 90^0$ hoặc $\alpha > 90^0$.

Ví dụ 1: (Bài 16/tr 117 – Sbt): *Cho hình chóp* S.ABCD *có đáy là hình thoi, cạnh bên* SA = AB *và* SA *vuông góc với* BC.

a. *Tính góc giữa hai đường thẳng* SD *và* BC.

b. *Gọi* I *và* J *lần lượt là các điểm thuộc* SB *và* SD *sao cho* IJ // BD. *Chứng minh rằng góc giữa* AC *và* IJ *không phụ thuộc vào vị trí của* I *và* J.



✍ *Giải*

a. Từ nhận xét BC // AD, ta có:

$90^0 = (SA, BC) = (SA, AD) \Rightarrow SA \perp AD.$

$\Rightarrow (SD, BC) = (SD, AD) = \widehat{SDA}..$

Trong ΔSAD, ta có:

$SA = AB = AD \Rightarrow \Delta SAD$ vuông cân tại $A \Rightarrow \widehat{SDA} = 45^0$.

Vậy, ta được $(SD, BC) = 45^0$.

b. Vì ABCD là hình thoi nên $AC \perp BD$, khi đó vì:

$IJ // BD \Rightarrow (AC, IJ) = (AC, BD) = 90^0$ – không phụ thuộc vị trí của I, J.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên:

- Để tìm góc giữa SD và BC chúng ta có ngay AD // BC nên nhận được góc $\widehat{SDA}$, và số đo của nó được xác định dựa trên hệ thức lượng trong tam giác vuông.
- Tương tự với AC và IJ (có giả thiết IJ // BD) chúng ta nhận được $(AC, IJ) = 90^0$ dựa trên tính chất của hình thoi.

Ví dụ 2: (Bài 23/tr 118 – Sbt): *Cho tứ diện* ABCD *có* $CD = \frac{4}{3}AB$. *Gọi* I, J, K *lần lượt là trung điểm của* BC, AC, BD. *Cho biết* $JK = \frac{5}{6}AB$, *tính góc giữa đường thẳng* CD *với các đường thẳng* IJ *và* AB.

✍ *Giải*

a. Ta lần lượt:

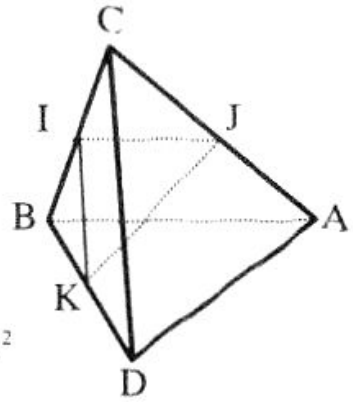
- Với hai đường thẳng CD và IJ ta có:

$CD // IK \Rightarrow (CD, IJ) = (IK, IJ).$

Đặt AB = a, trong ΔIJK ta có ngay:

$$JK = \frac{5a}{6},\quad IJ = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2},$$

$$IK = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}.\frac{4}{3}AB = \frac{2a}{3}$$



Suy ra:

$$IK^2 + IJ^2 = \left(\frac{2a}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{25a^2}{36} = \left(\frac{5a}{6}\right)^2 = JK^2$$

$\Leftrightarrow$ ΔIJK vuông tại I.

Vậy, góc giữa hai đường thẳng CD và IJ bằng 90^0.

- Với hai đường thẳng CD và AB ta có:

 AB // IJ $\Rightarrow$ (CD, AB) = (CD, IJ) = 90^0.

Ví dụ 3: *Cho tứ diện* ABCD. *Gọi* M, N *lần lượt là trung điểm của các cạnh* BC, AD.

a. *Hãy tính cosin của góc giữa* AB *và* DM, *biết* ABCD *là tứ diện đều có cạnh bằng* a.

b. *Hãy tính góc giữa* AB *và* CD, *biết* AB = CD = 2a *và* MN = $a\sqrt{3}$.

Giải

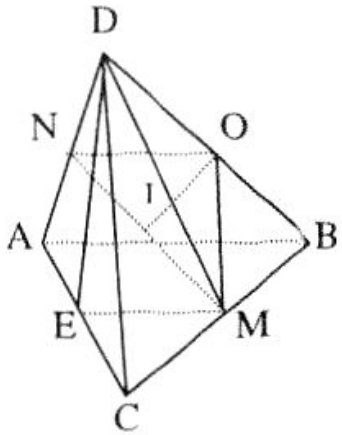
a. Gọi E là trung điểm của AC, ta có: EM // AB và $EM = \frac{a}{2}$.

Do đó (AB, DM) = (MD, ME).

Xét ΔDEM, ta có:

$DM = DE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, trung tuyến trong tam giác đều

$$\cos\widehat{DME} = \frac{DM^2 + EM^2 - DE^2}{2DM.EM} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$



Vậy, ta được $\cos(AB, DM) = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

b. Gọi O là trung điểm của BD, ta có:

ON // AB và ON = a

OM // CD và OM = a

do đó (AB, CD) = (OM, ON).

Gọi I là trung điểm MN, trong ΔIME vuông tại I, ta có:

$$\sin\widehat{MOI} = \frac{IM}{OM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{MOI} = 60^0$$

$\Rightarrow \widehat{MON} = 2\widehat{MOI} = 120^0 \Rightarrow (OM, ON) = 180^0 - 120^0 = 60^0$.

Vậy, ta được $(AB, CD) = 60^0$.

☞ *Nhận xét*: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên:

- Ở câu a), để tìm góc giữa AB và DM chúng ta lựa chọn điểm M trên DM để dựng đường thẳng song song với AB, bởi M, A, B cùng thuộc mặt phẳng (ABC) và dựa trên tính chất đường trung bình để đặt vấn đề theo cách *"Gọi* E *là trung điểm của* AC". Cuối cùng, côsin của góc $\widehat{DME}$ được tính dựa trên định lí hàm số côsin trong tam giác.
- Ở câu b), với hai đường thẳng AB và CD (hai cạnh đối của tứ diện) nếu chúng ta chọn các điểm đầu mút để dựng đường thẳng song song với đường thẳng còn lại sẽ không tạo được một tam giác, tức không thể tính được số đo của góc tạo thành. Và trong những trường hợp như vậy, chúng ta thường chọn trung điểm của đoạn thẳng nối (tức trung điểm của AC, AD, BC, BD) để làm điểm xuất phát.
 Khi thực hiện yêu cầu này, các em học sinh cần luôn ghi nhớ *"Góc giữa hai đường thẳng không thể là góc tù"*.

Ví dụ 4: *Cho hình chóp* S.ABC *có* SA = SB = SC = AB = AC = a *và* BC = $a\sqrt{2}$. *Tính góc giữa hai đường thẳng* SC *và* AB.

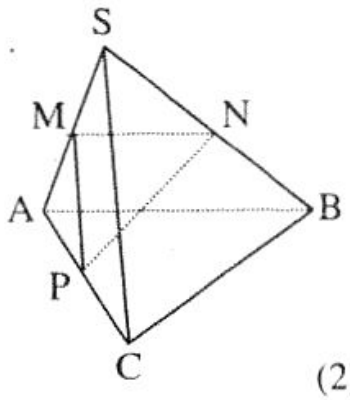
✍ *Giải*

Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của SA, SB, AC.

Khi đó, ta nhận thấy:

$$\begin{cases} MP // SC \\ MN // AB \end{cases} \Rightarrow (SC, AB) = (MP, MN).$$



Trong ΔMNP, ta có:

$$\cos\widehat{NMP} = \frac{MN^2 + MP^2 - NP^2}{2MN.MP}. \qquad (1)$$

Ta lần lượt có:

$$MN = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2} \text{ – vì MN là đường trung bình,} \qquad (2)$$

$$MP = \frac{1}{2}SC = \frac{a}{2} \text{ – vì MP là đường trung bình.} \qquad (3)$$

Trong ΔSBP, theo định lí đường trung tuyến ta có:

$$PB^2 + PS^2 = 2NP^2 + \frac{SB^2}{2}. \qquad (4)$$

Nhận xét rằng:

- Vì ΔABC vuông tại A (có $AB^2 + AC^2 = BC^2$) nên:

$$PB^2 = AB^2 + AP^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}. \qquad (5)$$

- Vì ΔSAC đều (có $SA = SC = AC = a$) nên $PS = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. (6)

Thay (5), (6) vào (4), ta được $NP = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. (7)

Thay (2), (3) và (7) vào (1), ta được:

$$\cos\widehat{NMP} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{NMP} = 120^0.$$

Vậy, góc giữa hai đường thẳng SC và AB bằng $180^0 - 120^0 = 60^0$.

Cách 2: Ta đi tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{AB}$, ta có:

$$\cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{SC}|.|\overrightarrow{AB}|} = \frac{(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AB}}{SC.AB} = \frac{\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}}{SC.AB}.$$

Trong đó:

- Vì ΔSAB đều (có $SA = SB = AB = a$) nên:

$$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AB} = SA.AB.\cos(180^0 - \widehat{SAB}) = a.a.\cos 120^0 = -\frac{a^2}{2}.$$

- Vì ΔABC vuông tại A (có $AB^2 + AC^2 = BC^2$) nên $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = 0$.

Từ đó, ta được:

$$\cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{-\frac{a^2}{2} + 0}{a^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = 120^0.$$

Vậy, góc giữa hai đường thẳng SC và AB bằng $180^0 - 120^0 = 60^0$.

Cách 3: Ta đi tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{AB}$, ta có:

$$\cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{SC}|.|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\overrightarrow{SC}(\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA})}{SC.AB} = \frac{\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SA}}{SC.AB}.$$

Trong đó:

- Vì ΔSBC vuông tại S (có $SB^2 + SC^2 = BC^2$) nên $\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SB} = 0$.
- Vì ΔSAC đều (có $SA = SC = AC = a$) nên:

$$\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SA} = SC.SA.\cos ASC = a.a.\cos 60^0 = \frac{a^2}{2}.$$

Từ đó, ta được:

$$\cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{0 - \frac{a^2}{2}}{a^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = 120^0.$$

Vậy, góc giữa hai đường thẳng SC và AB bằng $180^0 - 120^0 = 60^0$.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên:

- ***Ở cách 1***, góc giữa SC và AB được xác định dựa theo kinh nghiệm đã biết trong nhận xét của ví dụ trước.

- *Ở cách 2*, chúng ta đi tính góc giữa SC và AB thông qua các vectơ chỉ phương của nó. Với cách này thông thường chúng ta nhận được một lời giải ngắn gọn hơn. Tuy nhiên, khi đó các em học sinh cần có kiến thức tốt về vectơ.
- *Ở cách 3*, vẫn với ý tưởng như trên, nhưng chúng ta biến đổi vectơ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB}$ để nhận được tích vô hướng của các vectơ cùng gốc, và như trong chủ đề trước chúng ta đã được biết rằng *"Đối với tứ diện (hoặc gọi là hình chóp)* SACB *chúng ta thường chọn bộ vectơ sơ sở là* $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$ *để biểu diễn cho các vectơ còn lại"*. Ý tưởng này sẽ được thấy lại trong ví dụ tiếp theo.

Ví dụ 5: (Bài 17/tr 117 – Sbt): *Cho hình hộp* ABCD.A'B'C'D' *có các cạnh bằng* a, $\widehat{BAD} = 60^0$, $\widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 120^0$.

a. *Tính góc giữa các cặp đường thẳng* AB *với* A'D *và* AC' *với* B'D.

b. *Tính diện tích các hình* A'B'CD *và* ACC'A'.

c. *Tính góc giữa đường thẳng* AC' *và các đường thẳng* AB, AD, AA'.

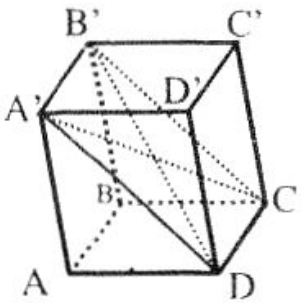
Giải

Đặt $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{y} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{z} = \overrightarrow{AA'}$.

Sử dụng công thức tích vô hướng lần lượt có:

$$\vec{x}^2 = \vec{y}^2 = \vec{z}^2 = a^2. \qquad \vec{x}.\vec{y} = \frac{a^2}{2},\ \vec{y}.\vec{z} = -\frac{a^2}{2},\ \vec{z}.\vec{x} = -\frac{a^2}{2}.$$

a.



- Với hai đường thẳng AB và A'D ta có hai cách:

Cách 1: Ta có:

$AB \,//\, CD \Rightarrow (AB, A'D) = (CD, A'D)$.

Trong $\Delta A'CD$, ta có:

$$\cos\widehat{A'DC} = \frac{A'D^2 + CD^2 - A'C^2}{2A'D.CD}. \qquad (1)$$

Ta lần lượt có:

$$A'D^2 = A'A^2 + AD^2 - 2A'A.AD.\cos\widehat{DAA'} = a^2 + a^2 - 2a.a.\cos 120^0 = 3a^2$$

$$\Leftrightarrow A'D = a\sqrt{3}. \qquad (2)$$

$$\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA'} = \vec{x} + \vec{y} - \vec{z}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{A'C}^2 = \left(\vec{x} + \vec{y} - \vec{z}\right)^2 = \vec{x}^2 + \vec{y}^2 + \vec{z}^2 + 2\vec{x}.\vec{y} - 2\vec{y}.\vec{z} - 2\vec{z}.\vec{x} = 2a^2$$

$$\Leftrightarrow A'C = a\sqrt{2}. \qquad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1) với lưu ý CD = a, ta được:

$$\cos\widehat{A'DC} = \frac{3a^2 + a^2 - 2a^2}{2.a\sqrt{3}.a} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Vậy, góc giữa hai đường thẳng AB và A'D có côsin bằng $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Cách 2: Ta có:

$$\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'D}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{A'D}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{A'D}|} = \frac{\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA'}\right)}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{A'D}|} = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AA'}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{A'D}|}. \quad (4)$$

Trong đó:

$$A'D^2 = A'A^2 + AD^2 - 2A'A.AD.\cos\widehat{DAA'} = a^2 + a^2 - 2a.a.\cos 120^0 = 3a^2$$

$$\Leftrightarrow A'D = a\sqrt{3}. \quad (5)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = AB.AD.\cos BAD = a.a.\cos 60^0 = \frac{a^2}{2}. \quad (6)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AA'} = AB.AA'.\cos BAA = a.a.\cos 120^0 = -\frac{a^2}{2}. \quad (7)$$

Thay (5), (6), (7) vào (4), ta được:

$$\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'D}\right) = \frac{\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}}{a.a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Vậy, góc giữa hai đường thẳng AB và A'D có côsin bằng $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

- Với hai đường thẳng AC' và B'D ta có hai cách:

Cách 1: Ta có:

$$\overrightarrow{AC'} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z},$$

$$\overrightarrow{B'D} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA'} = \vec{y} - \vec{x} - \vec{z},$$

$$\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{B'D} = \left(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}\right)\left(\vec{y} - \vec{x} - \vec{z}\right) = \vec{y}^2 - \left(\vec{x} + \vec{z}\right)^2 = \vec{y}^2 - \left(\vec{x}^2 + \vec{z}^2 + 2\vec{x}.\vec{z}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC'} \perp \overrightarrow{B'D}.$$

Vậy, góc giữa hai đường thẳng AC' và B'D bằng 90^0.

Cách 2: Trong hình bình hành AB'C'D, ta có:

$$AD = a,$$

$$\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \vec{x} + \vec{z} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB'}^2 = \left(\vec{x} + \vec{z}\right)^2 = \vec{x}^2 + \vec{z}^2 + 2\vec{x}\vec{z} = a^2 \Leftrightarrow AB' = a,$$

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB'} = \vec{y}\left(\vec{x} + \vec{z}\right) = \vec{y}.\vec{x} + \vec{y}.\vec{z} = 0 \Leftrightarrow \widehat{DAB'} = 90^0.$$

Từ đó, suy ra AB'C'D là hình vuông, nên góc giữa hai đường thẳng AC' và B'D bằng 90^0.

b.

- Với hình bình hành A'B'CD, ta có:

$$S_{A'B'CD} = A'D.A'B'.\sin\widehat{DA'B'} = a\sqrt{3}.a.\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = a^2\sqrt{2}.$$

- Với hình bình hành ACC'A', ta có:

$$S_{ACC'A'} = AC.CC'.\sin\widehat{ACC'}. \qquad (8)$$

Trong đó:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{x} + \vec{y} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}^2 = \left(\vec{x} + \vec{y}\right)^2 = \vec{x}^2 + \vec{y}^2 + 2\vec{x}\vec{y} = 3a^2$$

$$\Leftrightarrow AC = a\sqrt{3}. \qquad (9)$$

$$\overrightarrow{AC'}^2 = \left(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}\right)^2 = 2a^2 \Leftrightarrow AC' = a\sqrt{2}.$$

$$\cos\widehat{ACC'} = \frac{AC^2 + CC'^2 - AC'^2}{2AC.CC'} = \frac{3a^2 + a^2 - 2a^2}{2.a\sqrt{3}.a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \sin\widehat{ACC'} = \sqrt{1 - \cos^2\widehat{ACC'}} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \qquad (10)$$

Thay (9), (10) vào (8), ta được $S_{ACC'A'} = a\sqrt{3}.a.\frac{\sqrt{6}}{3} = a^2\sqrt{2}.$

c.

- Với hai đường thẳng AC' và AB, ta có:

$$\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AB} = \left(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}\right)\vec{x} = \vec{x}^2 + \vec{x}.\vec{y} + \vec{x}.\vec{z} = a^2$$

$$\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AB}\right) = \frac{\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AC'}\right|\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{a^2}{a\sqrt{2}.a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AB}\right) = 45^0.$$

Vậy, góc giữa hai đường thẳng AC' và AB bằng 45^0.

- Với hai đường thẳng AC' và AD, ta có:

$$\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AD} = \left(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}\right)\vec{y} = \vec{y}^2 + \vec{x}.\vec{y} + \vec{y}.\vec{z} = a^2$$

$$\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AD}\right) = \frac{\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AC'}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|} = \frac{a^2}{a\sqrt{2}.a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AD}\right) = 45^0.$$

Vậy, góc giữa hai đường thẳng AC' và AD bằng 45^0.

- Với hai đường thẳng AC' và AA', ta có:

$$\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AA'} = \left(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}\right)\vec{z} = \vec{z}^2 + \vec{x}.\vec{z} + \vec{y}.\vec{z} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC'} \perp \overrightarrow{AA'}.$$

Vậy, góc giữa hai đường thẳng AC' và AA' bằng 90^0.

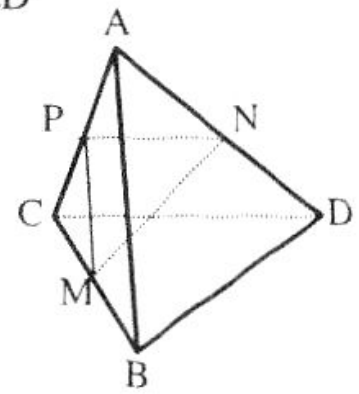
☞ ***Nhận xét***: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên để tính góc giữa hai đường thẳng chúng ta đã linh hoạt sử dụng kiến thức về vectơ để tính độ dài đoạn thẳng cũng với số đo góc giữa chúng.

Ví dụ 6: (Bài 20/tr 118 – Sbt): *Cho tứ diện* ABCD. *Lấy các điểm* M, N *lần lượt thuộc các đường thẳng* BC *và* AD *sao cho* $\overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MC}$ *và* $\overrightarrow{NA} = k\overrightarrow{ND}$ *với* k *là số thực khác* 0 *cho trước. Đặt* α *là góc giữa hai vectơ* $\overrightarrow{MN}$ *và* $\overrightarrow{BA}$, β *là góc giữa hai vectơ* $\overrightarrow{MN}$ *và* $\overrightarrow{CD}$. *Tìm mối liên hệ giữa* AB *và* CD *để* $\alpha = \beta = 45^0$.

Giải

Kẻ MP // AB, ta có:

$$\frac{PA}{PC} = \frac{MB}{MC} = -\frac{\overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{MC}} = -k = -\frac{\overrightarrow{NA}}{\overrightarrow{ND}} = \frac{NA}{ND} \Leftrightarrow PN // CD$$



Suy ra:

$$\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BA}\right) = \left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right) = \widehat{NMP} = \alpha.$$

$$\left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{CD}\right) = \left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PN}\right) = \widehat{MNP} = \beta.$$

Trong ΔMNP, ta có: $\alpha = \beta = 45^0 \Leftrightarrow \begin{cases} PM = PN \\ \widehat{MPN} = 90^0 \end{cases}$.

- Ta có:

$$\frac{PM}{AB} = \frac{CP}{CA} \Rightarrow PM = \frac{CP}{CA}.AB; \qquad \frac{PN}{CD} = \frac{AP}{CA} \Rightarrow PN = \frac{AP}{CA}.CD;$$

Với điều kiện PM = PN, suy ra:

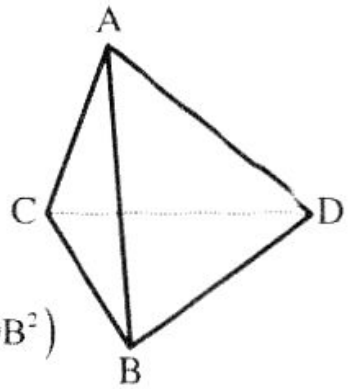
$$\frac{CP}{CA}.AB = \frac{AP}{CA}.CD \Leftrightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{PA}{PC} = \frac{MB}{MC} = -\frac{\overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{MC}} = -k \Leftrightarrow AB = |k|CD.$$

- Với điều kiện $\widehat{MPN} = 90^0$, ta có ngay $AB \perp CD$.

Vậy, với $AB \perp CD$ và $AB = |k|CD$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 7: (Bài 24/tr 118 – Sbt): *Cho tứ diện* ABCD *có* BC = AD = a, AC = BD = b, AB = CD = c. *Đặt* α *là góc giữa* BC *và* AD, β *là góc giữa* AC *và* BD, γ *là góc giữa* AB *và* CD. *Chứng minh rằng trong ba số hạng* $a^2\cos\alpha$, $b^2\cos\beta$, $c^2\cos\gamma$ *có một số hạng bằng tổng hai số hạng còn lại.*

Giải



Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$.

- Với hai đường thẳng BC và AD ta có:

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{1}{2}\left(AD^2 + AC^2 - DC^2\right) - \frac{1}{2}\left(AD^2 + AB^2 - DB^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(AC^2 + DB^2 - AB^2 - DC^2\right) = \frac{1}{2}\left(2b^2 - 2c^2\right) = b^2 - c^2$$

$$\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}\right) = \frac{b^2 - c^2}{a^2} \Leftrightarrow a^2.\cos\alpha = \left|b^2 - c^2\right|.$$

- Tương tự, với hai đường thẳng AC và BD, AB và CD ta có:

$$b^2.\cos\beta = \left|c^2 - a^2\right|, \qquad c^2.\cos\gamma = \left|a^2 - b^2\right|.$$

Khi đó, không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$, ta được:

$$a^2.\cos\alpha = b^2 - c^2, \qquad b^2.\cos\beta = a^2 - c^2, \qquad c^2.\cos\gamma = a^2 - b^2$$

Và trong trường hợp này, ta có:

$$b^2.\cos\beta = a^2.\cos\alpha + c^2.\cos\gamma.$$

☞ *Chú ý*: Ví dụ tiếp theo minh hoạ việc sử dụng tính chất số đo góc trong không gian để xác định đặc tính của thiết diện.

Ví dụ 8: *Cho hình chóp* S.ABCD *có đáy* ABCD *là hình bình hành với* AB = a, AD = 2a, SAB *là tam giác vuông cân tại* A, M *là điểm trên cạnh* AD (M *khác* A *và* D). *Mặt phẳng* (α) *qua* M *song song với mặt phẳng* (SAB) *cắt* BC, SC, SD *lần lượt tại* N, P, Q.

a. *Chứng minh rằng* MNPQ *là hình thang vuông.*

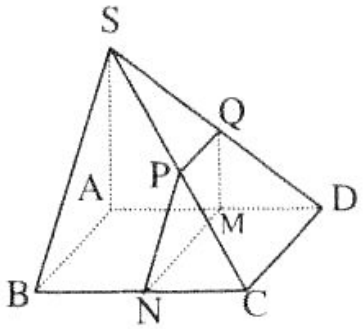
b. *Đặt* AM = x. *Tính diện tích của* MNPQ *theo* a *và* x.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\begin{cases} (\alpha) // (SAB) \\ (\alpha) \cap (SAD) = MQ \\ (SAB) \cap (SAD) = SA \end{cases} \Rightarrow MQ // SA. \quad (1)$$

$$\begin{cases} (\alpha) // (SAB) \\ (\alpha) \cap (ABCD) = MN \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \end{cases} \Rightarrow MN // AB. \quad (2)$$



Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{NMQ} = 90^0$.

Mặt khác, ba mặt phẳng (ABCD), (SCD) và (α) cắt nhau theo ba giao tuyến MN, CD, PQ có:

MN // CD $\Rightarrow$ MN // PQ $\Rightarrow$ MNPQ là hình thang vuông.

b. Ta có:

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MN + PQ).MQ. \quad (3)$$

Ta có ngay MN = AB = a. (4)

Trong ΔSAD, ta có:

$$\frac{MQ}{SA}=\frac{DM}{DA}=\frac{AD-AM}{DA}=\frac{2a-x}{2a}\Rightarrow MQ=\frac{2a-x}{2}. \quad (5)$$

Trong ΔSCD, ta có:

$$\frac{PQ}{CD}=\frac{SQ}{SD}=\frac{AM}{AD}=\frac{x}{2a}\Rightarrow PQ=\frac{x}{2}. \quad (6)$$

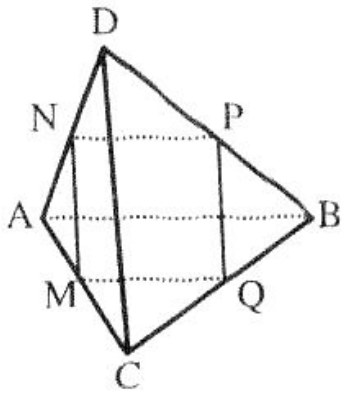
Thay (4), (5), (6) vào (3), ta được:

$$S_{MNPQ}=\frac{1}{2}(a+\frac{x}{2})\frac{2a-x}{2}=\frac{1}{8}(4a^2-x^2).$$

Ví dụ 9: (Bài 18/tr 117 – Sbt): *Cho tứ diện* ABCD *trong đó góc giữa đường thẳng* AB *và* CD *bằng* α. *Gọi* M *là điểm bất kì thuộc cạnh* AC, *đặt* AM = x (0 < x < AC). *Xét mặt phẳng* (P) *đi qua điểm* M *và song song với* AB, CD.

b. *Xác định vị trí của* M *để diện tích thiết diện của hình tứ diện* ABCD *với mặt phẳng* (P) *đạt giá trị lớn nhất.*

c. *Chứng minh rằng chu vi của thiết diện nêu trên không phụ thuộc vào* x *khi* AB = CD.



Giải

a. Ta thực hiện:

- Dựng MN // CD và MQ // AB.
- Dựng NP // AB.

Khi đó MNPQ là thiết diện cần dựng và nó là hình bình hành có:

$$(MQ, MN)=(AB, CD)=\alpha\Rightarrow \sin\widehat{QMN}=\sin\alpha.$$

Ta có ngay:

$$S_{MNPQ}=MQ.MN.\sin\widehat{QMN}. \quad (1)$$

Thực hiện lần lượt:

- Trong ΔABC, ta có:

$$\frac{MQ}{AB}=\frac{CM}{AC}=\frac{AC-AM}{AC}\Rightarrow MQ=\frac{AB}{AC}(AC-x).. \quad (2)$$

- Trong ΔACD, ta có:

$$\frac{MN}{CD}=\frac{AM}{AC}\Rightarrow MN=\frac{CD}{AC}.x.. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$S_{MNPQ}=\frac{AB.CD}{AC^2}(AC-x)x.\sin\alpha.$$

Nhận xét rằng:

$$(AC-x)x=\frac{AC^2}{4}-\left(x-\frac{AC}{2}\right)^2\le\frac{AC^2}{4}$$

Từ đó, suy ra $\text{Max}S_{MNPQ} = \frac{AB.CD}{AC^2}.\frac{AC^2}{4}.\sin\alpha = \frac{1}{4}AB.CD.\sin\alpha$ đạt được khi $x = \frac{AC}{2}$, tức M là trung điểm của AC.

b. Gọi p là nửa chu vi của thiết diện, ta có:

$$p = MQ + MN = \frac{AB}{AC}(AC - x) + \frac{CD}{AC}.x = \frac{CD - AB}{AC}.x + AB.$$

Từ đó, suy ra chu vi của thiết diện không phụ thuộc vào x khi:

$$\frac{CD - AB}{AC} = 0 \Leftrightarrow AB = CD.$$

☞ *Nhận xét*: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên:

- Ở câu a), chúng ta gặp lại dạng toán *"Xác định thiết diện đi qua một điểm và song song với hai đường thẳng chéo nhau cho trước"*. Và diện tích của thiết diện (là hình bình hành) này được tính theo công thức ***sin***, còn giá trị lớn nhất của nó được tìm thấy bằng việc sử dụng kiến thức về tam thức bậc hai.
- Ở câu b), chúng ta chỉ cần thiết lập công thức tính chu vi (nửa chu vi p = f(x)), rồi bằng việc nhóm theo bậc của x và cho các hệ số liên quan bằng 0 chúng ta sẽ nhận được điều kiện để p không phụ thuộc vào x – *Đây là dạng toán quen thuộc trong đại số.*

Vấn đề 2: CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI NHAU

Phương pháp áp dụng

Để chứng minh đường thẳng a (với vtcp $\vec{a}$) vuông góc với đường thẳng b (với vtcp $\vec{b}$), ta lựa chọn theo hướng:

Hướng 1: Chứng minh (a, b) = 90^0, trong nhiều trường hợp chúng ta sử dụng tích vô hướng.

Hướng 2: Sử dụng kết quả về liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của hai đường thẳng.

Ví dụ 1: (Bài 22/tr 118 – Sbt): *Cho hai tam giác cân* ABC *và* DBC *có chung cạnh đáy* BC *và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau.*

a. *Chứng minh rằng* AD *vuông góc với* BC.

b. *Gọi* M *và* N *là các điểm lần lượt thuộc các đường thẳng* AB *và* BD *sao cho* $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$ *và* $\overrightarrow{ND} = k\overrightarrow{NB}$. *Tính góc giữa hai đường thẳng* MN *và* BC.

✍ *Giải*

a. Gọi I là trung điểm của BC, ta có:

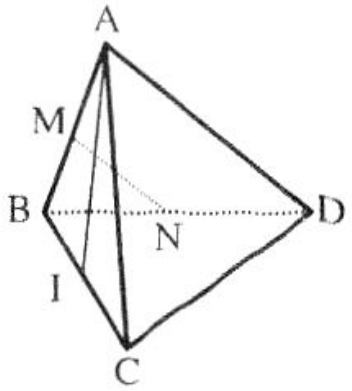
$BC \perp IA$, $BC \perp ID$,

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = = \left(\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{IA}\right)\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{ID}.\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{BC} = 0$

$\Leftrightarrow AD \perp BC$, đpcm.

b. Từ giả thiết $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{ND} = k\overrightarrow{NB}$, suy ra:

$MN // AD \Rightarrow (MN, BC) = (AD, BC) = 90^0$.



☞ ***Chú ý***: Khi có thêm kiến thức về đường thẳng vuông góc với mặt phẳng chúng ta sẽ có một cách giải khác để thực hiện câu a), cụ thể:

Vì các ΔABC, ΔDBC cân tại A và D nên:

$$\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp DI \end{cases} \Leftrightarrow BC \perp (IAD) \Rightarrow BC \perp AD, \text{ đpcm.}$$

Ví dụ 2: *Cho hình tứ diện đều* ABCD *cạnh bằng* a. *Gọi* O *là tâm đường tròn ngoại tiếp* ΔBCD. *Chứng minh rằng* AO *vuông góc với* CD.

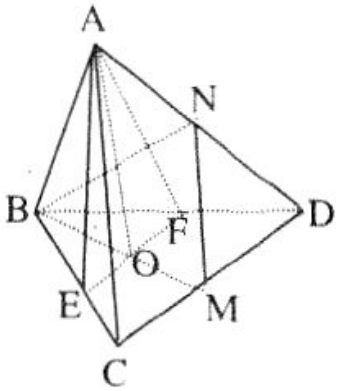
✍ *Giải*

Qua O dựng đường thẳng song song với CD, cắt BC, BD theo thứ tự tại E và F, M là trung điểm của CD suy ra:

$(AO, CD) = \widehat{AOF}$.

Ta có:

$$\begin{cases} EF // CD \\ BC = BD \\ MC = MD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BE = BF \\ OE = OF \end{cases}.$$



Xét hai tam giác ΔABE và ΔABF, ta có:

$$\begin{cases} BE = BF \\ AB \text{ chung} \\ \widehat{ABE} = \widehat{ABF} = 60^0 \end{cases} \Rightarrow \Delta ABE = \Delta ABF \Rightarrow AE = AF$$

$\Leftrightarrow \Delta AEF$ cân tại $A \Rightarrow AO \perp EF \Leftrightarrow \widehat{AOF} = 90^0 \Leftrightarrow AO \perp CD$.

Ví dụ 3: *Cho hình tứ diện* ABCD. *Chứng minh rằng*:

a. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$. *Từ đó, suy ra rằng nếu tứ diện* ABCD *có* $AB \perp CD$ *và* $AC \perp DB$ *thì* $AD \perp BC$.

b. (Bài 10/tr 96 – Sgk): *Nếu* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ *thì* $AB \perp CD$, $AC \perp BD$, $AD \perp BC$. *Điều ngược lại có đúng không ?*

c. (Bài 9/tr 96 – Sgk): *Nếu* $AD = BD = CD$ và $\widehat{ADB} = \widehat{BDC} = \widehat{CDA}$ *thì* $AD \perp BC$, $BD \perp AC$, $CD \perp AB$.

Giải

a. Ta lần lượt có:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}, \quad (1)$$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}, \quad (2)$$

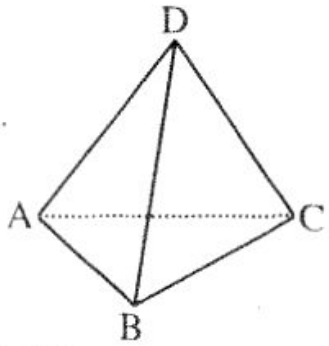
$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}. \quad (3)$$

Cộng theo vế (1), (2) và (3), ta được:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$, đpcm.

Khi đó, với điều kiện $AB \perp CD$ và $AC \perp DB$ thì:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$ và $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow AD \perp BC$.



b. Ta có:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow AB \perp CD$.

Chứng minh tương tự, ta cũng nhận được $AC \perp BD$, $AD \perp BC$.

Vì các phép biến đổi trên là tương đương nên điều ngược lại cũng đúng.

c. Ta có:

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BD}$$

$$= AD^2.\cos\widehat{CDA} - AD^2.\cos\widehat{ADB} = 0$$

$\Leftrightarrow AD \perp BC$, đpcm.

Chứng minh tương tự, ta cũng nhận được $BD \perp AC$, $CD \perp AB$.

Ví dụ 4: *Cho hình tứ diện* ABCD *có* $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = 60^0$, $\widehat{BAD} = 60^0$, $\widehat{CAD} = 90^0$. *Chứng minh rằng:*

a. $AB \perp CD$.

b. *Nếu* I *và* J *lần lượt là trung điểm của* AB *và* CD *thì* $IJ \perp AB$ *và* $IJ \perp CD$.

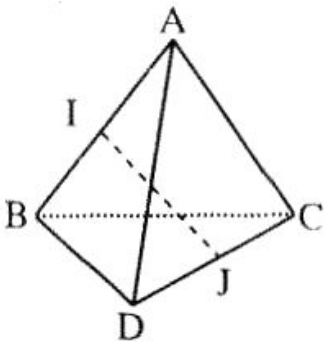
Giải

a. Ta có:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

$$= AB^2.\cos 60^0 - AB^2.\cos 60^0 = 0$$

$\Leftrightarrow AB \perp CD$, đpcm.



b. Từ giả thiết, suy ra ΔABC, ΔABD đều.

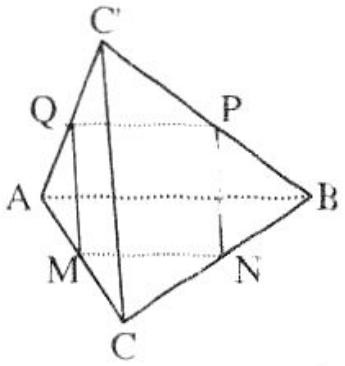
Ta lần lượt có:

- $\Delta ACD = \Delta BCD$ (c.c.c) $\Rightarrow JA = JB \Rightarrow \Delta JAB$ cân tại J $\Rightarrow IJ \perp AB$.
- $\Delta ABD = \Delta ABC$ (c.c.c) $\Rightarrow ID = IC \Rightarrow \Delta ICD$ cân tại I $\Rightarrow IJ \perp CD$.

Ví dụ 5: *Trong không gian cho hai tam giác đều* ABC *và* ABC' *có chung cạnh* AB *và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi* M, N, P, Q *lần lượt là trung điểm của các cạnh* AC, CB, BC', C'A. *Chứng minh rằng:*

a. $AB \perp CC'$.

b. *Tứ giác* MNPQ *là hình chữ nhật.*



✍ *Giải*

a. Gọi a là cạnh của tam giác đều, ta có:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC'}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}$$

$$= a^2.\cos 60^0 - a^2.\cos 60^0 = 0$$

$\Leftrightarrow AB \perp CC'$, đpcm.

b. Nhận xét rằng:

$$MN \overset{//}{=} \frac{1}{2}AB \text{ và } PQ \overset{//}{=} \frac{1}{2}AB \Rightarrow MN \overset{//}{=} PQ, \quad (1)$$

$$\hat{QMN} = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MQ}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CC'}) = 90^0, \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra MNPQ là hình chữ nhật.

Ví dụ 6: *Cho hình chóp* S.ABCD *đáy* ABCD *là hình bình hành.* SAB *và* SAD *là các tam giác vuông tại* A.

a. *Chứng minh rằng* SA *vuông góc với* BC *và* CD.

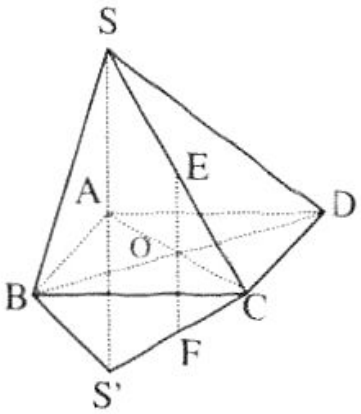
b. *Chứng minh rằng* SA *vuông góc với* AC *và* BD.

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\begin{cases} BC // AD \\ AD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp SA.$$

$$\begin{cases} CD // AB \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp SA.$$



b. Trên tia SA lấy điểm S' sao cho AS = AS', ta có:

AB, AD đều là trung trực của SS'

$\Rightarrow BS = BS'$ và $DS = DS' \Rightarrow \Delta SBD = \Delta S'BD$ (c.c.c)

$\Rightarrow OS = OS' \Rightarrow \Delta OSS'$ cân tại $O \Rightarrow OA \perp SS' \Leftrightarrow AC \perp SA$.

Trong (CSS') kẻ Ox song song với SS' và cắt SC, S'C theo thứ tự tại E, F và là trung điểm của mỗi đường, ta có ngay:

EF // SA.

Mặt khác, vì:

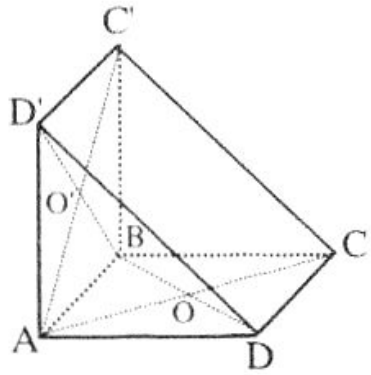
$\Delta SBC = \Delta S'BC$ (c.c.c) $\Rightarrow BE = BF \Rightarrow \Delta BEF$ cân tại B

$\Rightarrow OB \perp EF \Leftrightarrow BD \perp SA$.

☞ ***Chú ý***: Đề nghị các em học sinh đề xuất một cách giải khác để chứng minh SA vuông góc với BD.

Ví dụ 7: *Trong không gian cho hai hình vuông* ABCD *và* ABC'D' *có chung cạnh* AB *và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau, lần lượt có tâm* O *và* O'. *Chứng minh rằng* AB ⊥ OO' *và tứ giác* CDD'C' *là hình chữ nhật.*

Giải



a. Giả sử hình vuông có cạnh bằng a, ta có:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AO'} - \overrightarrow{AO}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO'} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO}$$

$$= a.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\cos 45^0 - a.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\cos 45^0 = 0$$

$\Leftrightarrow AB \perp OO'$, đpcm.

b. Nhận xét rằng:

$$CD \overset{//}{=} AB \text{ và } C'D' \overset{//}{=} AB \Rightarrow CD \overset{//}{=} C'D', \qquad (1)$$

$$D\hat{C}C' = (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CC'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OO'}) = 90^0, \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra CDD'C' là hình chữ nhật.

Ví dụ 8: *(Bài 8/tr 95 – Sgk):*

a. *Cho vectơ* $\vec{n}$ *khác* $\vec{0}$ *và hai vectơ* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *không cùng phương. Chứng minh rằng nếu vectơ* $\vec{n}$ *vuông góc với cả hai vectơ* $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$ *thì ba véctơ* $\vec{n}$, $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$ *không đồng phẳng.*

b. *Chứng minh rằng ba vectơ cùng vuông góc với vectơ* $\vec{n}$ *khác* $\vec{0}$ *thì đồng phẳng. Từ đó suy ra, các đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì cùng song song với một mặt phẳng.*

Giải

a. Giả sử trái lại, ba véctơ $\vec{n}$, $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đồng phẳng. Tức là tồn tại hai số x và y sao cho:

$$\vec{n} = x\vec{a} + y\vec{b} \Rightarrow \vec{n}.\vec{n} = x\vec{a}.\vec{n} + y\vec{b}.\vec{n} \Rightarrow \vec{n}^2 = 0 \Rightarrow |\vec{n}| = 0$$

điều đó mâu thuẫn với giả thiết.

Vậy, ba véctơ $\vec{n}$, $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không đồng phẳng.

b. Với ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ cùng vuông góc với vectơ $\vec{n}$.

Khi đó, nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương thì $\vec{n}$, $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không đồng phẳng, tức là tồn tại ba số x, y, z sao cho:

$$\vec{c} = x\vec{n} + y\vec{a} + z\vec{b} \Rightarrow \vec{c}.\vec{n} = x\vec{n}.\vec{n} + y\vec{a}.\vec{n} + z\vec{b}.\vec{n}$$

$$\Rightarrow 0 = x\vec{n}^2 \Rightarrow x = 0.$$

Tức là, ta có biểu diễn:

$$\vec{c} = y\vec{a} + z\vec{b} \Rightarrow \text{ba vectơ } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ đồng phẳng.}$$

Từ đó suy ra, các đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì cùng song song với một mặt phẳng.

Ví dụ 9: *Cho S là diện tích ΔABC. Chứng minh rằng:*

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2}\ .$$

Giải

Với ΔABC, ta có:

$$S = \frac{1}{2}AB.AC.\sin\hat{A} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|.\sin\hat{A}.$$

Mặt khác, ta có:

$$\sin\hat{A} = \sqrt{1-\cos^2\hat{A}} = \sqrt{1-\left(\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|}\right)^2} = \frac{\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|}.$$

Từ đó:

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|.\frac{\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|} = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2}\ .$$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài tập 1: Mỗi khẳng định sau có đúng không ?

a. Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

b. Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

Bài tập 2: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AD. Hãy tính góc giữa AB và CD, biết AB = CD = 2a và $MN = a\sqrt{2}$.

Bài tập 3: Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J, H, K lần lượt là trung điểm của BC, AC, AD, BD. Hãy tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD trong mỗi trường hợp sau:

a. Tứ giác IJHK là hình thoi có đường chéo $IH = IJ\sqrt{3}$.

b. Tứ giác IJHK là hình chữ nhật.

Bài tập 4: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có AB = a, BC = b và $AA_1 = c$.

a. Hãy tính góc giữa AD_1 và B_1C.

b. Hãy tính góc giữa AB và A_1C.

Bài tập 5: Cho tứ diện ABCD có AB = a, CD = b. Đoạn IJ nối trung điểm I của AB và trung điểm J của CD. Giả sử AB vuông góc với CD. (α) là mặt phẳng qua M trên đoạn IJ và song song với AB và CD.

a. Tìm giao tuyến của α với mặt phẳng (ICD).

b. Xác định thiết diện của ABCD với mặt phẳng α. Chứng minh thiết diện là hình chữ nhật.

c. Tính diện tích thiết diện, biết IJ = 3IM.

Bài tập 6: Cho tứ diện ABCD có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Lấy các điểm I, J, K lần lượt thuộc các đường thẳng BC, AC, AD sao cho $\overrightarrow{IB} = k\overrightarrow{IC}$, $\overrightarrow{JA} = k\overrightarrow{JC}$, $\overrightarrow{KA} = k\overrightarrow{KD}$ trong đó k là số khác không cho trước. Chứng minh rằng:

a. $MN \perp IJ$ và $MN \perp JK$.

b. $AB \perp CD$.

Bài tập 7: Trong mặt phẳng (α) cho ΔABC vuông tại A, $\hat{B} = 60^0$, AB = a. Gọi O là trung điểm của BC. Lấy điểm S ở ngoài (α), sao cho SB = a và SB vuông góc với OA. Gọi M là một điểm trên cạnh AB, mặt phẳng (β) qua M và song song với SB và OA, cắt BC, SC, SA lần lượt tại N, P, Q. Đặt x = BM, với $0 < x < a$.

a. Chứng minh MNPQ là hình thang vuông.

b. Tính theo a và x diện tích của hình thang này.

c. Tính x để diện tích này lớn nhất.

Bài tập 8: Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình bình hành. SAB và SAD là các tam giác vuông tại A.

a. Chứng minh rằng SA vuông góc với BC và CD.

b. Chứng minh rằng SA vuông góc với AC và BD.

Bài tập 9: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau.

a. Chứng minh rằng AC vuông góc với B_1D_1.

b. Chứng minh rằng AB_1 vuông góc với CD_1.

c. Chứng minh rằng AD_1 vuông góc với CB_1.

Bài tập 10: Cho hình tứ diện đều ABCD. Chứng minh rằng các cặp cạnh đối của tứ diện vuông góc với nhau.

Bài tập 11: Chứng minh rằng nếu đường thẳng (d) vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b nằm trong mặt phẳng (α) thì nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong (α).

Bài tập 12: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành, mặt bên SAB là tam giác vuông tại A. Với điểm M bất kì thuộc cạnh AD (M khác A và D), xét mặt phẳng (P) đi qua điểm M và song song với SA, CD.

a. Thiết diện của hình chóp S.ABCD khi cắt bởi mặt phẳng (P) là hình gì ?

b. Tính diện tích của thiết diện theo a và b, biết AB = a, SA = b, M là trung điểm của AD.

CHỦ ĐỀ 3 ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

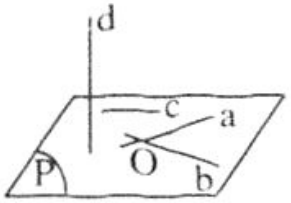
A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. ĐỊNH NGHĨA ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

Định lí mở đầu: *Nếu đường thẳng* (d) *vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau* (a) *và* (b) *nằm trong mặt phẳng* (P) *thì nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong* (P).

Như vậy:

$$\begin{cases}(a) \text{ cắt } (b)\\ (d) \perp (a) \text{ và } (d) \perp (b)\end{cases} \Rightarrow \forall c \subset (\alpha) \text{ luôn có } (d) \perp (c).$$



Định nghĩa 1: *Một đường thẳng gọi là vuông góc với một mặt phẳng khi nó vuông góc với mọi đường thẳng chứa trong mặt phẳng đó.*

Định lí 1: *Nếu đường thẳng* (d) *vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau* (a) *và* (b) *nằm trong mặt phẳng* (P) *thì đường thẳng* (d) *vuông góc với mặt phẳng* (P).

Như vậy:

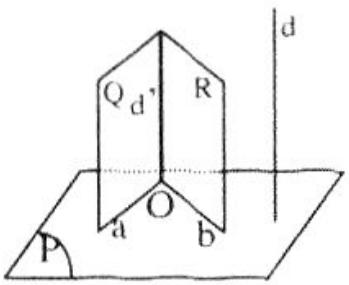
$$\begin{cases}(a) \text{cắt } (b)\\ (d) \perp (a) \text{ và } (d) \perp (b)\end{cases} \Rightarrow (d) \perp (a, b).$$

2. CÁC TÍNH CHẤT

Tính chất 1: *Qua một điểm* O *cho trước có duy nhất một mặt phẳng* (P) *vuông góc với một đường thẳng* (d) *cho trước.*

Cách dựng: Ta lần lượt thực hiện:

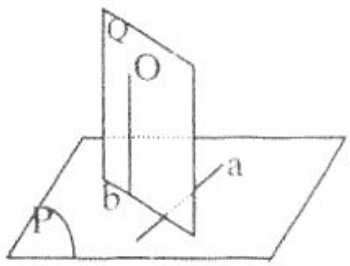
- Qua O dựng đường thẳng (d') // (d).
- Lấy hai mặt phẳng phân biệt (Q) và (R) cùng đi qua (d'). Trong (Q) dựng đường thẳng (a) qua O và vuông góc với (d'). Trong (R) dựng đường thẳng (b) qua O và vuông góc với (d')



Khi đó, mặt phẳng (a, b) chính là mặt phẳng cần dựng.

Tính chất 2: *Qua một điểm* O *cho trước có duy nhất một đường thẳng* d *vuông góc với một mặt phẳng* (P) *cho trước.*

Cách dựng: Ta lần lượt thực hiện:



- Lấy đường thẳng (a) nằm trong (P).
- Dựng mặt phẳng (Q) qua O vuông góc với (a) cắt (P) theo giao tuyến (b).
- Trong (Q) dựng đường thẳng (d) qua O và vuông góc với (b)

Khi đó, đường thẳng (d) chính là đường thẳng cần dựng.

Bài toán: Cho tứ diện ABCD. Tìm điểm O cách đều bốn đỉnh của tứ diện.

Giải

Gọi (d) là đường thẳng đi qua tâm I đường tròn ngoại tiếp ΔABC và vuông góc với (ABC). Mặt phẳng trung trực của đoạn AD cắt (d) tại O thì O cách đều bốn đỉnh của tứ diện, thật vậy trước tiên ta có ngay:

$$OA = OD. \quad (1)$$

Mặt khác:

$$\Delta OIA = \Delta OIB = \Delta OIC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow OA = OB = OC. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra: $OA = OB = OC = OD$

Tức là, điểm O cách đều bốn đỉnh của tứ diện.

3. LIÊN HỆ GIỮA QUAN HỆ SONG SONG VÀ QUAN HỆ VUÔNG GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Tính chất 3:

a. *Cho hai đường thẳng song song. Mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.*

b. *Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.*

Tính chất 4:

a. *Cho hai mặt phẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.*

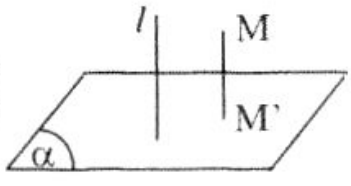
b. *Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.*

Tính chất 5:

a. *Cho đường thẳng* a *và mặt phẳng* (P) *song song với nhau. Đường thẳng nào vuông góc với* (P) *thì cũng vuông góc với* a.

b. *Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.*

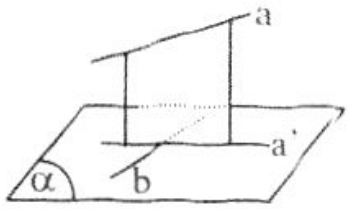
4. ĐỊNH LÍ BA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC



Định nghĩa 2 (*Phép chiếu vuông góc*): *Phép chiếu song song trong đó phương chiếu vuông góc với mặt chiếu gọi là phép chiếu vuông góc.*

☞ ***Chú ý***: Phép chiếu vuông góc có đầy đủ các tính chất của phép chiếu song song.

Định lí 2 (*Định lí ba đường vuông góc*): *Cho đường thẳng* a *có hình chiếu trên mặt phẳng* (P) *là đường thẳng* a'. *Khi ấy, một đường thẳng* b *nằm trong* (P) *vuông góc với* a *khi và chỉ khi nó vuông góc với* a'.

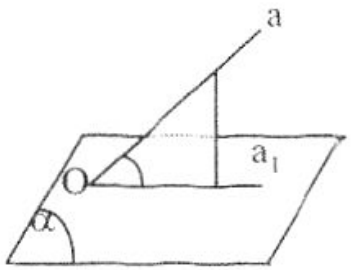


Tức là:

$$a \perp b \subset (P) \Leftrightarrow a' \perp b.$$

5. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Định nghĩa 3: *Góc giữa đường thẳng* a *và mặt phẳng* (P) *là góc giữa đường thẳng* a *và hình chiếu* a' *của nó trên* (P), kí hiệu là (a, (P)) hay ((P), a).



Đặc biệt:

- Khi a thuộc (P) hoặc a song song với (P) thì $(a, (P)) = 0^0$.
- Khi a vuông góc với (P) thì $(a, (P)) = 90^0$.

Như vậy, ta luôn có $0 \le (a, (P)) \le 90^0$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG – MẶT PHẲNG TRUNG TRỰC. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI NHAU.

Phương pháp áp dụng

1. Để chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P), ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

 Cách 1: Chứng minh a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau chứa trong (P).

 Cách 2: Chứng minh a song song với đường thẳng b vuông góc với (P).

2. Để chứng minh mặt phẳng (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB ta đi chứng minh (P) vuông góc với AB tại trung điểm I của AB

3. Để chứng minh hai đường thẳng a, b vuông góc với nhau, ta có thể lựa chọn một trong các cách sau:

 Cách 1: Chứng minh đường thẳng a vuông góc với một mặt phẳng chứa đường thẳng b.

Cách 2: Sử dụng định lí ba đường vuông góc.

Cách 3: Nếu hai đường thẳng ấy cắt nhau thì có thể áp dụng các phương pháp đã học trong hình học phẳng.

Ví dụ 1: *Cho tứ diện* ABCD *có hai mặt* ABC *và* BCD *là hai tam giác cân có chung cạnh đáy* BC. *Gọi* I *là trung điểm của cạnh* BC.

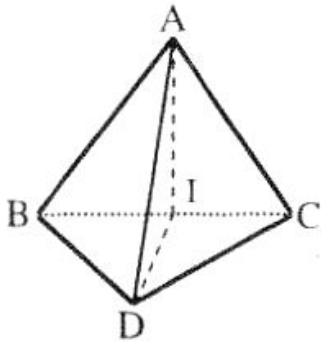
a. *Chứng minh rằng* BC *vuông góc với mặt phẳng* (ADI).

b. *Gọi* AH *là đường cao của tam giác* ADI, *chứng minh rằng* AH *vuông góc với mặt phẳng* (BCD).

✍ *Giải*

a. Vì ΔABC và ΔBCD cân theo thứ tự tại A và D nên:

$$\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp DI \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ADI), \text{ đpcm.}$$



b. Với AH là đường cao của ΔADI, suy ra $AH \perp DI$. (1)

Mặt khác từ a), ta có:

$BC \perp (ADI) \Rightarrow BC \perp AH$. (2)

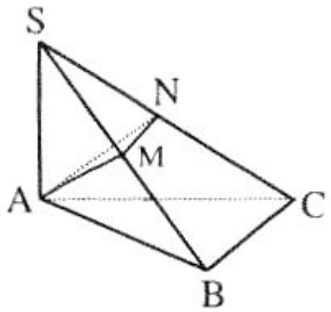
Từ (1) và (2), suy ra $AH \perp (BCD)$.

☞ ***Nhận xét***: Như vậy, ví dụ trên đã minh hoạ cách 1 trong việc chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng. Và lời giải của câu b) phụ thuộc vào kết quả trong a).

Ví dụ 2: *Cho tứ diện* SABC *có cạnh* SA *vuông góc với mặt phẳng* (ABC) *và có tam giác* ABC *vuông tại* B. *Trong mặt phẳng* (SAB) *kẻ* AM *vuông góc với* SB *tại* M. *Trên cạnh* SC *lấy điểm* N *sao cho* $\frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC}$. *Chứng minh rằng* :

a. $BC \perp (SAB)$ *và* $AM \perp (SBC)$.

b. $MN \perp (SAB)$, *từ đó suy ra* $SB \perp AN$.



✍ *Giải*

a. Ta lần lượt có:

$$\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB).$$

$$\begin{cases} AM \perp SB \\ AM \perp BC \end{cases} \Rightarrow AM \perp (SBC).$$

b. Từ giả thiết:

$$\frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC} \Rightarrow MN \,//\, BC \Rightarrow MN \perp (SAB) \Rightarrow MN \perp SB$$

$$\Rightarrow SB \perp (AMN) \Rightarrow SB \perp AN, \text{ đpcm.}$$

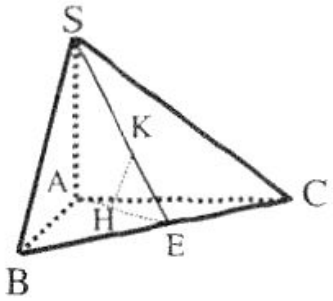
☞ *Nhận xét*: Như vậy, trong câu b) của ví dụ trên đã minh hoạ cách 2 để chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.

Ví dụ 3: (Bài 18/tr 103 – Sgk): *Cho hình chóp* S.ABC *có* SA ⊥ (ABC), *các tam giác* ABC *và* SBC *không vuông. Gọi* H *và* K *lần lượt là trực tâm của các* ΔABC *và* ΔSBC. *Chứng minh rằng*:

a. AH, SK, *BC đồng quy.* b. SC ⊥ mp(BHK).

c. HK ⊥ mp(SBC).

✍ *Giải*



a. Gọi {E} = AH ∩ BC, ta có:

$$\begin{cases} BC \perp AE \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAE) \Rightarrow BC \perp SE$$

⇒ SE là đường cao của Δ SBC ⇒ K ∈ SE.

Vậy, ba đường thẳng AH, SK, BC đồng quy tại E.

b. Ta có:

$$\begin{cases} BH \perp AC \\ BH \perp SA \end{cases} \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp SC. \quad (1)$$

Mặt khác, ta có BK ⊥ SC. (2)

Từ (1) và (2), suy ra SC ⊥ (BHK). (*)

c. Từ (*), suy ra SC ⊥ HK. (3)

Mặt khác, từ a), suy ra BC ⊥ HK. (4)

Từ (3) và (4), suy ra HK ⊥ (SBC).

Ví dụ 4: (Bài 17/tr 103 – Sgk): *Cho tứ diện* OABC *có* OA, OB, OC *đôi một vuông góc với nhau. Gọi* H *là hình chiếu vuông của điểm* O *trên mặt phẳng* (ABC).

a. *Chứng minh rằng* BC ⊥ (OAH), CA ⊥ (OBH), AB ⊥ (OCH).

b. *Chứng minh rằng* H *là trực tâm của* ΔABC.

c. *Chứng minh rằng* $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

d. *Chứng minh rằng các góc của tam giác* ABC *đều nhọn.*

✍ *Giải*

a. Từ giả thiết:

OH ⊥ (ABC) ⇒ OH ⊥ BC. (1)

Ta có:

$$\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Leftrightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (OAH)$.

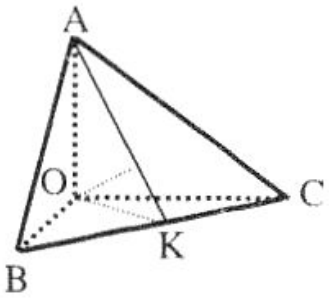
Chứng minh tương tự ta nhận được $CA \perp (OBH)$, $AB \perp (OCH)$.

b. Từ kết quả câu a), ta có:

$BC \perp (OAH) \Rightarrow BC \perp AH.$ (3)

$AC \perp (OBH) \Rightarrow AC \perp BH.$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra H là trực tâm của ΔABC.



c. Giả sử AH cắt BC tại K, suy ra $OK \perp BC$.

- Trong ΔOBC vuông tại O, ta có:

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$$

- Trong ΔOAK vuông tại O, ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}, \text{ đpcm.}$$

d. Giả sử $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$.

Xét ΔABC vuông tại O, ta có:

$AB^2 = OA^2 + OB^2 = a^2 + b^2$,

$BC^2 = OB^2 + OC^2 = b^2 + c^2$,

$AC^2 = OA^2 + OC^2 = a^2 + c^2$,

$$\cos\widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \frac{a^2 + b^2 + a^2 + c^2 - (b^2 + c^2)}{2\sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{a^2 + c^2}} > 0$$

$\Rightarrow$ góc $\widehat{BAC}$ nhọn.

Chứng minh tương tự, ta được các góc $\widehat{BCA}$ và $\widehat{ACB}$ đều nhọn.

Vậy, các góc của tam giác ABC đều nhọn.

Ví dụ 5: *Hình chóp* S.ABCD *có đáy* ABCD *là hình vuông cạnh* a, *cạnh* SA = a *và vuông góc với mặt phẳng* (ABCD).

a. *Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp là những tam giác vuông.*

b. *Mặt phẳng* (α) *đi qua* A *và vuông góc với cạnh* SC *lần lượt cắt* SB, SC, SD *tại* B', C', D'. *Chứng minh* B'D' *song song với* BD *và* AB' *vuông góc với* SB.

Giải

a. Ta có ngay, các tam giác SAB và SAD vuông tại A.

Từ giả thiết:

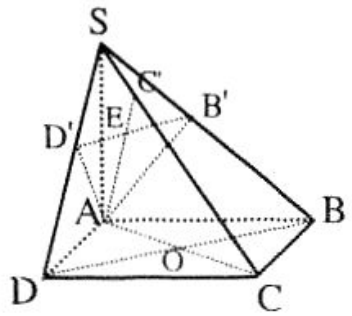
$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC.$ (1)

Mặt khác, ta có:

$AB \perp BC$, vì ABCD là hình vuông. (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow \Delta SBC$ vuông tại B.



Chứng minh tương tự ta được ΔSDC vuông tại D.

b. Từ giả thiết và kết hợp với kết quả câu a), ta được:

$$\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Leftrightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC.$$

Chứng minh tương tự ta được $AK \perp SC$.

Như vậy, vì AH, AI, AK cùng vuông góc với SC nên ba đường thẳng AH, AI, AK cùng chứa trong mặt phẳng qua A và vuông góc với SC.

c. Nhận xét rằng:

$$\Delta SAB = \Delta SAD \text{ (c.g.c)} \Rightarrow SB' = SD'.$$

Trong ΔSBD, ta có:

$$\frac{SB'}{SB} = \frac{SD'}{SD} \Rightarrow B'D' \,//\, BD.$$

Ta có:

$$SC \perp (\alpha) \Rightarrow SC \perp AB'. \qquad (3)$$

Từ kết quả trong a) là:

$$BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB'. \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra:

$$AB' \perp (SBC) \Rightarrow AB' \perp SB.$$

Ví dụ 6: *Cho hình chóp* S.ABCD *có đáy* ABCD *là hình vuông tâm* O, SA *vuông góc với mặt phẳng* (ABCD). *Gọi* H, I, K *lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm* A *trên* SB, SC, SD.

b. *Chứng minh rằng* $BC \perp (SAB)$, $CD \perp (SAD)$.

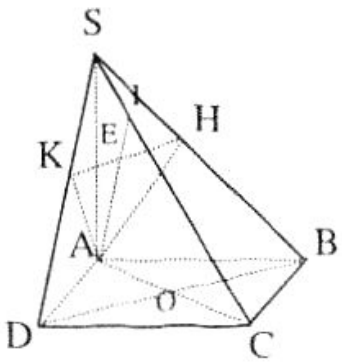
c. *Chứng minh rằng* (SAC) *là mặt phẳng trung trực của đoạn* BD.

d. *Chứng minh rằng* AH, AK *cùng vuông góc với* SC. *Từ đó suy ra ba đường thẳng* AH, AI, AK *cùng chứa trong một mặt phẳng.*

e. *Chứng minh rằng* (SAC) *là mặt phẳng trung trực của đoạn* HK. *Từ đó suy ra* $HK \perp AI$.

f. *Tính diện tích tứ giác* AHIK, *biết* SA = AB = a.

Giải



a. Từ giả thiết:

$$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC. \qquad (1)$$

Mặt khác, ta có:

$$AB \perp BC, \text{ vì ABCD là hình vuông.} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (SAB)$.

Chứng minh tương tự ta được $CD \perp (SAD)$.

b. Từ giả thiết:

$$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD. \qquad (3)$$

Mặt khác, ta có:

$AC \perp BD$, vì ABCD là hình vuông. (4)

Từ (3) và (4) suy ra:

$BD \perp (SAC)$ tại trung điểm O của BD.

Vậy, (SAC) là mặt trung trực của đoạn BD.

c. Từ giả thiết và kết hợp với kết quả câu a), ta được:

$$\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Leftrightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC.$$

Chứng minh tương tự ta được $AK \perp SC$.

Như vậy, vì AH, AI, AK cùng vuông góc với SC nên ba đường thẳng AH. AI, AK cùng chứa trong mặt phẳng qua A và vuông góc với SC.

d. Giả sử HK cắt AI tại E.

Nhận xét rằng:

$\Delta SAB = \Delta SAD$ (c.g.c) $\Rightarrow SH = SK$.

Trong ΔSBD, ta có:

$$\frac{SH}{SB} = \frac{SK}{SD} \Rightarrow HK \text{ // } BD \text{ và E là trung điểm của HK.}$$

Kết hợp với kết quả ở câu a), suy ra:

$HK \perp (SAC)$ tại trung điểm E của HK.

Vậy, (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn HK.

Từ kết quả $HK \perp (SAC)$ suy ra $HK \perp AI$.

e. Ta có:

$$S_{AHIK} = \frac{1}{2} AI.HK. \qquad (5)$$

Trong đó:

- Trong ΔSAC vuông tại A, ta được:

$$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{6}}{3}. \qquad (6)$$

- Trong ΔSBD, ta được:

$$\frac{SH}{SB} = \frac{SK}{SD} = \frac{1}{2} \Rightarrow HK \text{ là đường trung bình} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \qquad (7)$$

Thay (6), (7) vào (5), ta được; $S_{AHIK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}$.

Vấn đề 2: THIẾT DIỆN QUA MỘT ĐIỂM CHO TRƯỚC VÀ VUÔNG GÓC VỚI MỘT ĐƯỜNG THẲNG CHO TRƯỚC

Phương pháp áp dụng

Để tìm thiết diện của khối đa diện (S) với mặt phẳng (P), (P) qua điểm M cho trước và vuông góc với một đường thẳng (d) cho trước, ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Dựng mặt phẳng (P) như sau:

- Dựng hai đường thẳng cắt nhau cùng vuông góc với d, trong đó có ít nhất một đường thẳng qua M.
- Mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng trên chính là α.
- Xác định thiết diện theo phương pháp đã học.

Cách 2: Nếu có hai đường thẳng cắt nhau hay chéo nhau a, b cùng vuông góc với d thì:

(P) // a hay chứa a

(P) // b hay chứa b

Ví dụ 1: *Cho hình chóp* S.ABCD *có* ABCD *là hình vuông cạnh bằng* a, $SA = a\sqrt{2}$ *và vuông góc với* (ABCD). *Gọi* AH *là đường cao của* ΔSAB.

a. *Tính tỉ số* $\frac{SH}{SB}$ *và độ dài* AH.

b. *Gọi* (α) *là mặt phẳng qua* A *và vuông góc với* SB, (α) *cắt hình chóp* S.ABCD *theo thiết diện là hình gì ? Tính diện tích của thiết diện.*

Giải

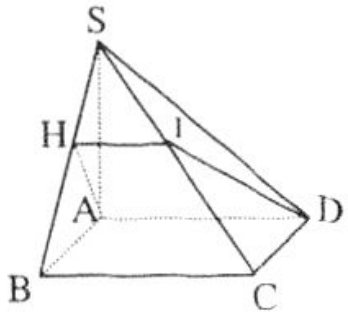
a. Trong ΔSAB vuông tại S, ta có:

$$\frac{SH}{SB} = \frac{SH.SB}{SB^2} = \frac{SA^2}{AB^2 + SA^2} = \frac{(a\sqrt{2})^2}{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = \frac{2}{3}.$$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{(a\sqrt{2})^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{2a^2} \Leftrightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

b. Dựng thiết diện:

- Trong (SBC) dựng Hx $\perp$ SB và cắt SC tại I.
- Nối D với I, ta được thiết diện là tứ giác AHID.



Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB.$$

Trong mặt phẳng (SBC), ta có:

$$\begin{cases} BC \perp SB \\ HI \perp SB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} HI // BC // AD \\ HI \perp AH \end{cases} \Rightarrow AHID \text{ là hình thang vuông tại A và H}$$

Trong ΔSBC, ta có:

$$\frac{HI}{BC} = \frac{SH}{SB} = \frac{2}{3} \Rightarrow HI = \frac{2a}{3}.$$

Từ đó:

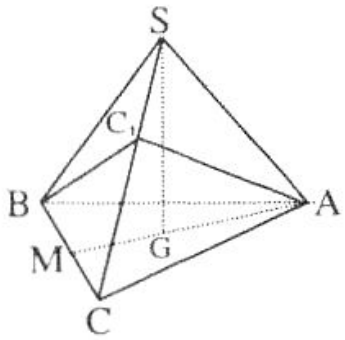
$$S_{AHID} = \frac{1}{2}(AD + HI).AH = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2a}{3}\right).\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{5a^2\sqrt{6}}{18}.$$

Ví dụ 2: (Bài 19/tr 103 – Sgk): *Cho hình chóp* S.ABC *có* ABC *là tam giác đều cạnh* a *và* SA = SB = SC = b. *Gọi* G *là trọng tâm* ΔABC.

a. *Chứng minh rằng* SG ⊥ (ABC). *Tính* SG.

b. *Xét mặt phẳng* (P) *đi qua* A *và vuông góc với đường thẳng* SC. *Tìm hệ thức liên hệ giữa* a *và* b *để* (P) *cắt* SC *tại điểm* C_1 *nằm giữa* S *và* C. *Khi đó, hãy tính diện tích thiết diện của hình chóp* S.ABC *khi cắt bởi mặt phẳng* (P).

Giải



a. Gọi M là trung điểm BC, ta có:

$$\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SM \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SG.$$

Chứng minh tương tự, ta cùng nhận được:

$$AB \perp SG \Rightarrow SG \perp (ABC).$$

Trong ΔGSA vuông tại G, ta có:

$$SG^2 = SA^2 - GA^2 = b^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = b^2 - \frac{a^2}{3} \Rightarrow SG = \frac{\sqrt{9b^2 - 3a^2}}{3}.$$

b. Để điểm C_1 nằm giữa S và C điều kiện là ΔSAC (cân tại S) nhọn

$$\Leftrightarrow \widehat{ASC} < 90^0 \Leftrightarrow \cos\widehat{ASC} > 0 \Leftrightarrow \frac{SA^2 + SC^2 - AC^2}{2SA.SC} > 0$$

$$\Leftrightarrow 2b^2 - a^2 > 0 \Leftrightarrow a^2 > 2b^2 \Leftrightarrow a > b\sqrt{2}.$$

Ta có:

$$\Delta SAC = \Delta SBC \text{ (c.c.c)} \Rightarrow SC \perp B_1C \Rightarrow SC \perp (ABC_1)$$

$$\Rightarrow \Delta ABC_1 \text{ cân tại } C_1 \text{ chính là thiết diện.}$$

Ta có:

$$AC_1 = SA.\sin\widehat{ASC} = SA\sqrt{1 - \cos^2\widehat{ASC}} = b\sqrt{1 - \left(\frac{2b^2 - a^2}{2b^2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{2b},$$

$$S_{\Delta ABC_1} = \frac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{4b}.$$

Ví dụ 3: *Cho hình tứ diện* S.ABC *có* ABC *là tam giác đều cạnh bằng* a. SA = a *và vuông góc với mặt phẳng* (ABC). *Gọi* M *là một điểm tuỳ ý trên cạnh* AC, (α) *là mặt phẳng qua* M *và vuông góc với* AC.

a. *Tuỳ theo vị trí của điểm* M *trên cạnh* AC, *có nhận xét gì về thiết diện tạo bởi* (α) *với tứ diện* S.ABC.

b. *Đặt* CM = x, *với* 0 < x < a. *Tính diện tích S của thiết diện trên theo* a *và* x *và xác định* x *để diện tích này có giá trị lớn nhất. Tính diện tích lớn nhất đó.*

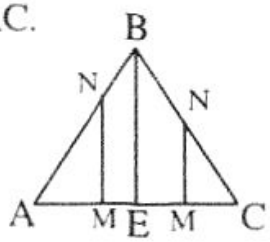
Giải

a. Gọi E là trung điểm của AC, ta có ngay:

BE ⊥ AC.

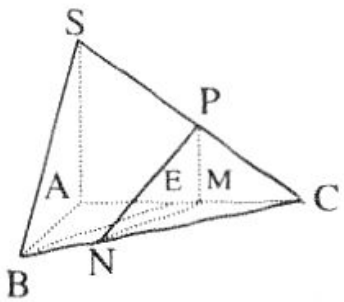
Do đó, cần xét hai trường hợp khác nhau về vị trí của điểm M trên cạnh AC và trong đó ta sử dụng:

SA ⊥ (ABC) ⇒ SA ⊥ AC.



Trường hợp 1: Với M thuộc đoạn CE, ta thực hiện:

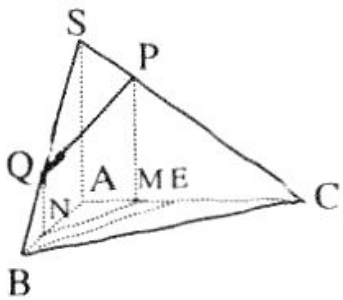
- Trong (ABC) dựng Mx // BE và cắt BC tại N (ta được MN ⊥ AC).
- Trong (SAC) dựng My // SA và cắt SC tại P (ta được MP ⊥ AC).



Như vậy, trong trường hợp này ta được thiết diện là ΔMNP vuông tại M.

Trường hợp 2: Với M thuộc đoạn AE (trừ điểm E).

- Trong (ABC) dựng Mx // BE và cắt AC tại N (ta được MN ⊥ AC).
- Trong (SAC) dựng My // SA và cắt SC tại P (ta được MP ⊥ AC).
- Trong (SAB) dựng Nz // SA và cắt SB tại Q (ta được NQ ⊥ AC).



Như vậy, trong trường hợp này ta được thiết diện là hình thang vuông MNQP (vuông tại M và N).

b. Ta xét hai trường hợp của điểm M

Trường hợp 1: Với M thuộc đoạn CE, ta có $0 < x \le \frac{a}{2}$ và diện tích ΔMNP là:

$$S_{\Delta MNP} = \frac{1}{2} MN.MP. \qquad (1)$$

Trong ΔBCE, ta có:

$$\frac{MN}{BE} = \frac{CM}{CE} = \frac{x}{\frac{a}{2}} \Rightarrow MN = x\sqrt{3}. \qquad (2)$$

Trong ΔSAC, ta có:

$$\frac{MP}{SA}=\frac{CM}{CA}=\frac{x}{a}\Rightarrow MP=x \text{ – } \textit{Cách tính thứ nhất.} \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$S_{\Delta MNP}=\frac{1}{2}.x\sqrt{3}.x=\frac{x^2\sqrt{3}}{2}$$

Ta có ngay: $(S_{\Delta MNP})_{Max}=\dfrac{\left(\frac{a}{2}\right)^2\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$, đạt được khi $x=\dfrac{a}{2}$.

Trường hợp 2: Với M thuộc đoạn AE, ta có $\frac{a}{2}<x<a$ và diện tích MNQP là:

$$S_{MNQP}=\frac{1}{2}(MP+NQ).MN. \quad (4)$$

Trong ΔABE, ta có:

$$\frac{MN}{BE}=\frac{AM}{AE}=\frac{a-x}{\frac{a}{2}}\Rightarrow MN=\sqrt{3}(a-x). \quad (5)$$

Vì ΔSAC vuông cân tại A nên ΔPMC vuông cân tại N, do đó:

$MP=CE=x$ – *Cách tính thứ hai.* (6)

Trong ΔSAB, ta có:

$$\frac{NQ}{SA}=\frac{BN}{BA}=\frac{ME}{EA}=\frac{x-\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}}\Rightarrow NQ=2x-a. \quad (7)$$

Thay (5), (6), (7) vào (4), ta được:

$$S_{MNQP}=\frac{1}{2}(x+2x-a).\sqrt{3}(a-x)=\frac{\sqrt{3}}{2}(3x-a)(a-x).$$

Ta biến đổi tiếp:

$$S_{MNQP}=-\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(x^2-\frac{4ax}{3}+\frac{a^2}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}\left[\frac{a^2}{9}-\left(x-\frac{2a}{3}\right)^2\right]\le\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$$

Suy ra $(S_{MNQP})_{Max}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}$ đạt được khi $x=\dfrac{2a}{3}$.

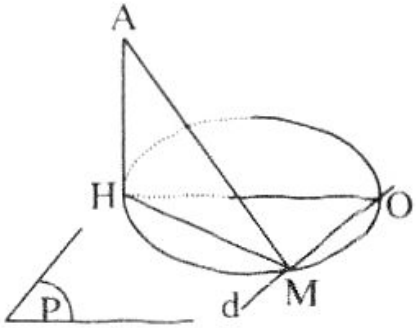
Tóm lại, ta được: $S_{td}=\begin{cases}\dfrac{x^2\sqrt{3}}{2} & \text{với } 0<x\le\dfrac{a}{2}\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}(3x-a)(a-x) & \text{với } \dfrac{a}{2}<x<a\end{cases}$

Và $(S_{td})_{Max}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}$ đạt được khi $x=\dfrac{2a}{3}$.

Vấn đề 3: TẬP HỢP HÌNH CHIẾU CỦA MỘT ĐIỂM CỐ ĐỊNH TRÊN MỘT ĐƯỜNG THẲNG DI ĐỘNG

Phương pháp áp dụng

Với yêu cầu "*Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc* M *của điểm cố định* A *trên đường thẳng* (d) *di động trong mặt phẳng* (P) *cố định và luôn qua một điểm cố định* O", ta thực hiện theo các bước sau:



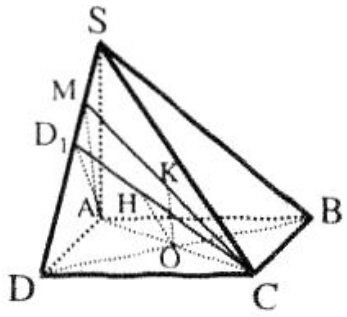
Bước 1: Dựng $AH \perp (P)$ $(H \in (P))$, theo định lí ba đường vuông góc ta có $HM \perp (d)$.

Bước 2: Trong mặt phẳng (P), vì $\widehat{HMO} = 90^0$ nên M thuộc đường tròn đường kính OH chứa trong (P).

Ví dụ 1: (Bài 33/tr 120 – Sbt): *Cho hình chóp* S.ABCD *có đáy* ABCD *là hình vuông tâm* O, SA = a.

a. *Gọi* D_1 *là trung điểm của* SD. *Chứng minh rằng* $AD_1 \perp (SCD)$.

b. *Gọi* O *là tâm của hình vuông* ABCD, M *là điểm thay đổi trên* SD. *Chứng minh rằng hình chiếu vuông góc của* O *trên đường thẳng* CM *thuộc đường tròn cố định.*



✍ *Giải*

a. Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} CD \perp AB \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AD_1.$$

Mặt khác, ta cũng có $SD \perp AD_1$, vì ΔSAD_1 cân tại A.

Từ đó, suy ra $AD_1 \perp (SCD)$.

b. Nhận thấy đường thẳng CM nằm trong mặt phẳng (SCD) cố định và đi qua điểm C cố định.

Kẻ OH // AD_1, thì H là trung điểm của CD_1 (suy ra H cố định) và $OH \perp (SCD)$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của O trên đường thẳng CM, suy ra:

$CM \perp HK$, theo định lí ba đường vuông góc

$\Rightarrow \widehat{CKH} = 90^0 \Rightarrow$ K thuộc đường tròn đường kính OH chứa trong (SCD).

Khi S di động trên tia Ax thì M thuộc nửa đường tròn đường kính BH trong nửa mặt phẳng (SAB) bờ AB.

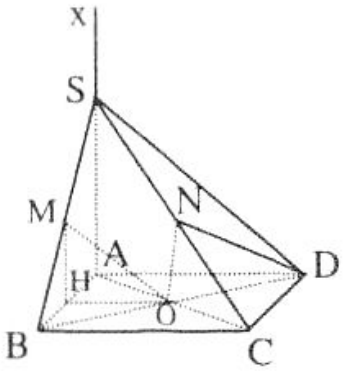
☞ ***Nhận xét:*** Như vậy, trong ví dụ trên câu a) được đề xuất để gợi ý cho việc thực hiện bước 1 của câu b).

Ví dụ 2: *Cho hình vuông* ABCD *tâm* O; S *là một điểm di động trên tia* Ax *vuông góc với mặt phẳng* (ABCD).

a. *Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của* O *trên đường thẳng* SB.

b. *Tìm tập hợp chân đường cao vẽ từ đỉnh* D *trong* ΔSDC.

Giải



a. Nhận thấy đường thẳng SB nằm trong mặt phẳng (SAB) cố định và đi qua điểm B cố định.

Hạ OH ⊥ AB, từ giả thiết:

SA ⊥ (ABCD) ⇒ SA ⊥ OH ⇒ OH ⊥ (SAB).

Gọi M là hình chiếu vuông góc của O trên đường thẳng SB, suy ra:

SB ⊥ MH, theo định lí ba đường vuông góc

⇒ $\widehat{BMH} = 90^0$ ⇒ M thuộc đường tròn đường kính BH chứa trong (SAB).

Khi S di động trên tia Ax thì M thuộc nửa đường tròn đường kính BH trong nửa mặt phẳng (SAB) bờ AB.

b. Nhận thấy đường thẳng SC nằm trong mặt phẳng (SAC) cố định và đi qua điểm C cố định.

Ta có:

$$\begin{cases} DO \perp AC \\ DO \perp SA \end{cases} \Rightarrow DO \perp (SAC).$$

Gọi N là hình chiếu vuông góc của D trên đường thẳng SC, suy ra:

ON ⊥ SC, theo định lí ba đường vuông góc

⇒ $\widehat{ONC} = 90^0$ ⇒ N thuộc đường tròn đường kính OC chứa trong (SAC).

Khi S di động trên tia Ax thì N thuộc nửa đường tròn đường kính OC trong nửa mặt phẳng (SAC) bờ AC.

Ví dụ 3: *Cho hình thang* ABCD *vuông tại* A *và* B, *có* AD = 2a, AB = BC = a. *Trên tia* Ax *vuông góc với mặt phẳng* (ABCD) *lấy một điểm* S. *Gọi* C', D' *lần lượt là hình chiếu vuông góc của* A *trên* SC *và* SD. *Chứng minh rằng*:

a. $\widehat{SBC} = \widehat{SCD} = 90^0$.

b. AD', AC' *và* AB *cùng nằm trên một mặt phẳng.*

c. *Chứng minh rằng đường thẳng* C'D' *luôn luôn đi qua một điểm cố định khi* S *di động trên tia* Ax.

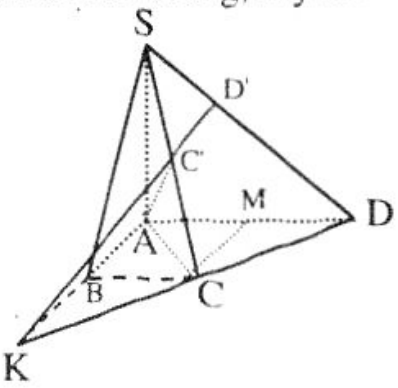
✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Leftrightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow \widehat{SBC} = 90^0.$$

Gọi M là trung điểm của AD, ta có nhận xét rằng ABCM là hình vuông, suy ra:

$$CM = a = \frac{1}{2}AD \Rightarrow \Delta ACD \text{ vuông tại C.}$$



Khi đó:

$$\begin{cases} CD \perp AC \\ CD \perp SA \end{cases} \Leftrightarrow CD \perp (SAC)$$

$$\Rightarrow CD \perp SC \Rightarrow \widehat{SCD} = 90^0.$$

b. Dựa vào kết quả trong a), ta có:

$$CD \perp (SAC) \Rightarrow CD \perp AC' \Rightarrow AC' \perp (SCD) \Rightarrow AC' \perp SD.$$

Mặt khác, ta có:

$$\begin{cases} AB \perp SA \\ AB \perp AD \end{cases} \Leftrightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp SD.$$

Vậy, ta được AB, AC', AD' cùng vuông góc với SD do đó chúng thuộc mặt phẳng qua A và vuông góc với SD.

c. Giả sử AB cắt CD tại K – cố định.

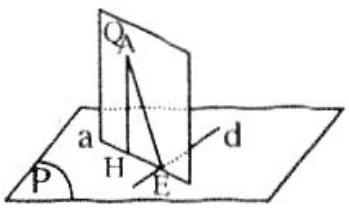
Theo định lí về giao tuyến thì K thuộc C'D'.

Vậy, đường thẳng C'D' luôn luôn đi qua điểm cố định K khi S di động trên tia Ax.

Vấn đề 4: TÌM TẬP HỢP HÌNH CHIẾU VUÔNG GÓC CỦA MỘT ĐIỂM CỐ ĐỊNH TRÊN MỘT MẶT PHẲNG DI ĐỘNG

Phương pháp áp dụng

Với yêu cầu "*Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc* H *của một điểm cố định* A *trên mặt phẳng* (P) *di động luôn chứa một đường thẳng* (d) *cố định*", ta thực hiện theo các bước sau:



Bước 1: Xác định mặt phẳng (Q) qua A vuông góc với d. Tìm a = (P) ∩ (Q)

Bước 2: Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên a, thì H cũng là hình chiếu vuông góc của A trên (P).

Bước 3: Gọi E là giao điểm của d với (Q). Trong mặt phẳng (Q), ta có $\widehat{AHE} = 90^0$ nên H thuộc đường tròn đường kính AE.

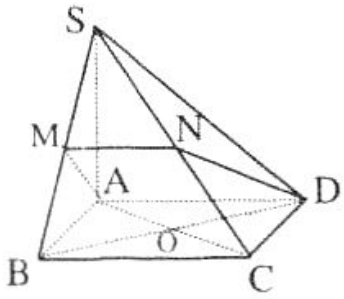
Ví dụ 1: *Cho hình chóp* S.ABCD *có đáy* ABCD *là hình thoi tâm* O *cạnh* a, $A\hat{B}C = 60^0$, SA = a *và vuông góc với mặt phẳng* (ABCD). *Gọi* M *là một điểm trên cạnh* SB.

a. *Khi* M *là trung điểm của cạnh* SB, *tính diện tích của thiết diện của hình chóp* S.ABCD *với mặt phẳng* (ADM).

b. *Khi* M *di động trên cạnh* SB. *Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của* S *trên mặt phẳng* (ADM).

Giải

a. Ta có:



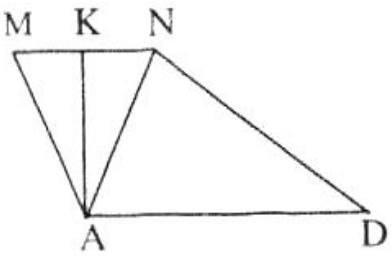
$$\begin{cases} AD \in (ADM) \text{ và } BC \in (SBC) \\ AD // BC \\ (ADM) \cap (SBC) = Mx \end{cases} \Rightarrow Mx // AD // BC$$

và Mx cắt SC tại N.

Khi đó, ta nhận được thiết diện AMND là hình thang.

Trong hình thang AMND hạ AK ⊥ MN, ta được:

$$S_{AMND} = \frac{1}{2}(AD + MN).AK \qquad (1)$$



Trong đó:

- Trong ΔSBC có MN là đường trung bình nên:

$$MN = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}. \qquad (2)$$

- Trong ΔSAB vuông tại A có AM là trung tuyến thuộc cạnh huyền nên:

$$AM = \frac{1}{2}SB = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AB^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \qquad (3)$$

- Trong ΔSAC vuông tại A có AN là trung tuyến thuộc cạnh huyền nên:

$$AN = \frac{1}{2}SC = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AC^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \qquad (4)$$

- Trong ΔAMN cân tại A, ta có:

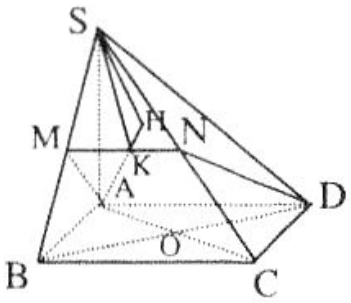
$$AK = \sqrt{AM^2 - MK^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{7}}{4}. \qquad (5)$$

Thay (2), (5) vào (1), ta được:

$$S_{AMND} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{2}\right).\frac{a\sqrt{7}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{7}}{16}.$$

b. Nhận thấy mặt phẳng (ADM) chứa đường thẳng AD cố định. Ta đi dựng mặt phẳng qua S và vuông góc với AD bằng nhận xét:

$$AK \perp MN \Leftrightarrow AK \perp AD$$



Khi đó:

$(SAK) \perp AD$ và $(SAK) \cap (ADM) = AK$.

Trong (SAK) hạ $SH \perp AK$ thì H cũng là hình chiếu vuông góc của S trên (ADM).

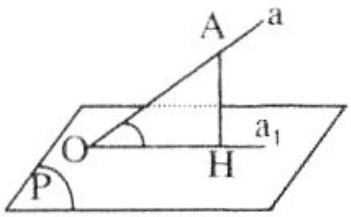
Trong (SAK), ta có: $SH \perp AH \Leftrightarrow \widehat{SHA} = 90^0$ nên H thuộc đường tròn đường kính SA trong mặt phẳng (SAK).

Hạn chế quĩ tích – *Để nghị bạn đọc tự làm.*

Vấn đề 5: GÓC GIỮA MỘT ĐƯỜNG THẲNG VÀ MỘT MẶT PHẲNG

Phương pháp áp dụng

Để tính góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P), ta thực hiện theo các bước:



Bước 1: Tìm giao điểm O của a với (P).

Bước 2: Chọn điểm $A \in a$ và dựng $AH \perp (P)$, với $H \in (P)$.

Khi đó $\widehat{AOH} = (a, (P))$

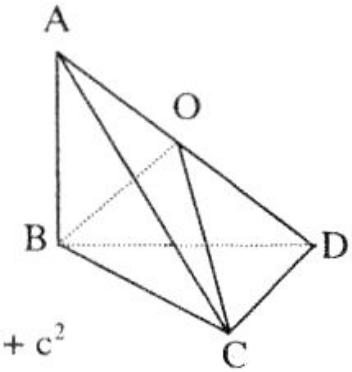
Bước 3: Tính số đo của $\widehat{AOH}$ dựa trên các hệ thức lượng giác.

Ví dụ 1: (Bài 16/tr 103 – Sgk): *Cho hình tứ diện* ABCD *có* AB, BC, CD *đôi một vuông góc và* AB = a, BC = b, CD = c.

a. *Tính độ dài* AD.

b. *Chỉ ra điểm cách đều* A, B, C, D.

c. *Tính góc giữa đường thẳng* AD *và mặt phẳng* (BCD), *góc giữa đường thẳng* AD *và mặt phẳng* (ABC)



Giải

a. Ta có:

$$\begin{cases} CD \perp AB \\ CD \perp BC \end{cases} \Leftrightarrow CD \perp (ABC) \Rightarrow CD \perp AC$$

$\Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại C

$\Rightarrow AD^2 = AC^2 + CD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 = a^2 + b^2 + c^2$

$\Rightarrow AD = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

b. Gọi O là trung điểm của AD.

- Vì ΔACD vuông tại C nên $OA = OC = OD$. (1)
- Ta có: $\begin{cases} CD \perp AB \\ BC \perp AB \end{cases} \Leftrightarrow AB \perp (BCD) \Rightarrow AB \perp BD \Rightarrow \Delta ABD$ vuông tại B

$\Rightarrow OA = OB = OD$. (2)

Vậy, điểm O cách đều A, B, C, D.

c. Ta lần lượt có

- Với góc giữa AD và mặt phẳng (BCD), ta có:

$$\begin{cases} AB \perp BD \\ AB \perp CD \end{cases} \Leftrightarrow AB \perp (BCD) \Rightarrow (AD, (BCD)) = \widehat{ADB}.$$

Trong ΔABD, ta có: $\sin\widehat{ADB} = \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

- Với góc giữa AD và mặt phẳng (ABC), ta có:

$$\begin{cases} AC \perp CD \\ AB \perp CD \end{cases} \Leftrightarrow CD \perp (ABC) \Rightarrow (AD, (ABC)) = \widehat{DAC}.$$

Trong ΔACD, ta có: $\sin\widehat{DAC} = \dfrac{CD}{AD} = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

☞ *Chú ý*: Tứ diện trên được gọi với tên "***tứ diện trực tâm***". Chúng ta sẽ có ví dụ tiếp theo sẽ trình bày cụ thể tính chất của laọi tứ diện này.

Ví dụ 2: *Cho hình chóp* S.ABC *đáy* ABC *là tam giác vuông tại* A, BC = a, $SA = SB = SC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

a. *Tính khoảng cách từ* S *tới mặt phẳng* (ABC).

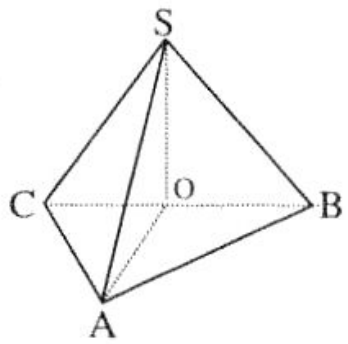
b. *Tính góc giữa đường thẳng* SA *và mặt phẳng* (ABC).

✍ *Giải*

a. Gọi O là trung điểm của BC, suy ra O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Ngoài ra, theo giả thiết ta có SA = SB = SC nên SO là trục đường tròn của ba ΔABC, suy ra:

$SO \perp (ABC)$ và $SO = d(S, (ABC))$.



Trong ΔSAO vuông tại O, ta có:

$OA = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{a}{2}$, trung tuyến thuộc cạnh huyền

$$SO^2 = SA^2 - OA^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

b. Vì $SO \perp (ABC)$ nên OA là hình chiếu vuông góc của SA trên (ABC), do đó: $(SA, (ABC)) = SAO$.

Trong ΔSAO vuông tại O, ta có: $\cos SAO = \dfrac{OA}{SA} = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy, ta được $\cos(SA, (ABC)) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Ví dụ 3: 1. *Cho tứ diện* ABCD *có* AB ⊥ CD, AC ⊥ BD. *Chứng minh rằng* AD ⊥ BC. *Vậy, các cạnh đối diện của tứ diện đó vuông góc với nhau. Tứ diện như thế gọi là* ***tứ diện trực tâm.***

2. *Chứng minh các mệnh đề sau đây là tương đương:*
 a. ABCD *là tứ diện trực tâm.*
 b. *Chân đường cao hạ từ một đỉnh trùng với trực tâm của mặt đối diện.*
 c. $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

3. *Chứng minh rằng bốn đường cao của tứ diện trực tâm đồng quy tại một điểm. Điểm đó gọi là trực tâm của tứ diện nói trên.*

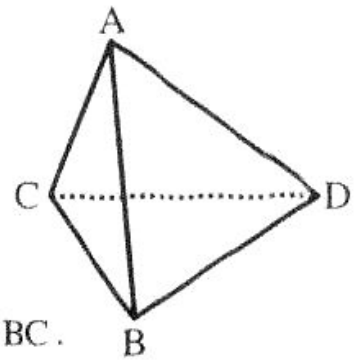
Giải

Ta lần lượt có:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}, \quad (1)$$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}, \quad (2)$$

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}. \quad (3)$$



Cộng theo vế (1), (2) và (3), ta được:

$$0 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow AD \perp BC.$$

1. Chứng minh (a) và (b) tương đương.

Với giả thiết (a), gọi A' là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (BCD), ta có: $\begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (A'AD) \Rightarrow BC \perp A'D.$

Chứng minh tương tự, ta cũng có BD ⊥ A'C.

Từ đó, suy ra A' là trực tâm ΔBCD.

Với giả thiết (b), gọi A' là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (BCD), ta có: $\begin{cases} BC \perp DA' \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (A'AD) \Rightarrow BC \perp AD.$

Chứng minh tương tự, ta cũng có AB ⊥ CD, AC ⊥ BD.

2. Chứng minh (a) và (c) tương đương.

Với giả thiết (a), ta có:

$$0 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}^2$$

$$\Leftrightarrow .(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})^2 + AC^2 = .(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2 + AD^2$$

$$\Leftrightarrow BD^2 + AC^2 = BC^2 + AD^2.$$

Chứng minh tương tự, ta cũng nhận được $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$.

Vì các phép biến đổi trên là tương đương nên điều ngược lại vẫn đúng.

3. Chứng minh (a) và (d) tương đương – *Bạn đọc tự giải.*

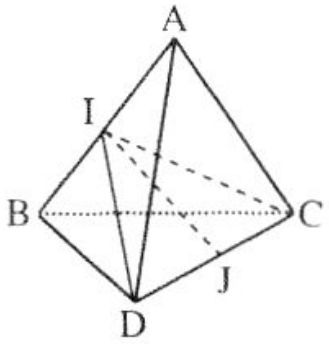
Ví dụ 4: (Bài 7/tr 121 – Sgk): *Một tứ diện được gọi là gần đều nếu các cạnh đối bằng nhau từng đôi một. Với tứ diện* ABCD, *chứng tỏ các tính chất sau là tương đương:*

a. *Tứ diện* ABCD *là gần đều.*

b. *Các đoạn thẳng nối trung điểm cặp cạnh đối diện đôi một vuông góc với nhau.*

c. *Các trọng tuyến (đoạn nối đỉnh với trọng tâm của mặt đối diện) bằng nhau.*

d. *Tổng các góc tại mỗi đỉnh bằng* 180^0.



✍ *Giải*

Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AB và CD.

a. Chứng minh (a) và (b) tương đương.

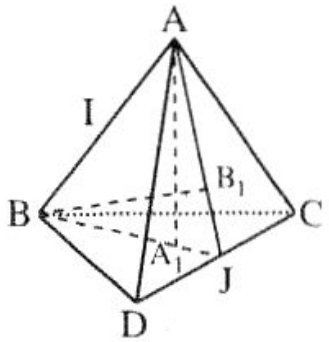
Từ giả thiết AC = BD, AD = BC, suy ra:

- $\Delta ABC = \Delta BAD \Rightarrow IC = ID \Rightarrow IJ \perp CD$. (1)
- $\Delta ACD = \Delta BDC \Rightarrow JA = JB \Rightarrow IJ \perp AB$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra IJ chính là đoạn vuông góc chung của AB và CD.

Điều ngược lại vẫn đúng – *Bạn đọc tự chứng minh dựa trên công thức về đường trung tuyến.*

b. Chứng minh (a) và (c) tương đương.



Từ giả thiết AC = BD, AD = BC, suy ra:

$\Delta ACD = \Delta BDC$ (c.c.c) $\Rightarrow JA = JB \Rightarrow JA_1 = JB_1$

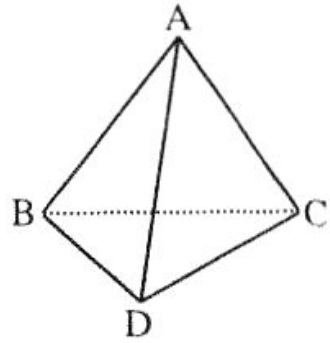
$\Rightarrow \Delta AA_1J = \Delta BB_1J$ (c.g.c) $\Rightarrow AA_1 = BB_1$.

Điều ngược lại vẫn đúng – *Bạn đọc tự chứng minh dựa trên tam giác bằng nhau.*

c. Chứng minh (a) và (d) tương đương.

Từ giả thiết AC = BD, AD = BC, AB = CD, suy ra:

$\Delta ABC = \Delta CDA = \Delta BAD = \Delta DCB$



Suy ra:

$B\hat{A}C = \widehat{CDB}$, (1)

$C\hat{A}D = \widehat{DBC}$, (2)

$D\hat{A}B = \widehat{BCD}$, (2)

Cộng theo vế (1), (2), (3), ta được:

$B\hat{A}C + C\hat{A}D + D\hat{A}B = \widehat{CDB} + \widehat{DBC} + \widehat{BCD} = 180^0$.

Điều ngược lại vẫn đúng, bởi ta trải các mặt ABC, ACD, ADB lên mặt phẳng (BCD) ta được hình khai triển của tứ diện ABCD nhận BC, CD, DB là ba đường trung bình của tam giác đó. Từ đó, suy ra:

$AC = BD, AD = BC, AB = CD.$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài tập 1: Chứng tỏ rằng nếu một đường thẳng vuông góc với hai cạnh của một tam giác thì nó vuông góc với cạnh thứ ba.

Bài tập 2: Cho hai đường thẳng a, b và mặt phẳng (P). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a. Nếu a // (P) và $b \perp$ (P) thì $b \perp a$.
b. Nếu a // (P) và $b \perp a$ thì $b \perp$ (P).
c. Nếu a // (P) và a // b thì b // (P).

Bài tập 3: Tìm tập hợp các điểm cách đều ba đỉnh của ΔABC.

Bài tập 4: Gọi I là một điểm bất kì ở trong đường tròn (O), tâm O, bán kính bằng R. CD là dây cung của đường tròn (O) qua I. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn (O) tại I ta lấy điểm S với OS = R. Gọi E là điểm đối tâm của D trên đường tròn (O).

a. Chứng minh rằng ΔSDE vuông tại S
b. Chứng minh rằng $SD \perp CE$.
c. Chứng minh rằng ΔSCD vuông.

Bài tập 5: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi ABCD tâm O và có SA = SB = SC = SD. Chứng minh rằng:

a. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng (ABCD).
b. Đường thẳng AC vuông góc với mặt phẳng (SBD) và đường thẳng BD vuông góc với mặt phẳng (SAC).

Bài tập 6: Trên mặt phẳng (α) cho hình bình hành ABCD tâm O. Gọi S là một điểm nằm ngoài mặt phẳng (α) sao cho SA = SC , SB = SD. Chứng minh rằng:

a. $SO \perp (\alpha)$.
b. Nếu trong mặt phẳng (SAB) kẻ SH vuông góc với AB tại H thì AB vuông góc với mặt phẳng (SOH).

Bài tập 7: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi ABCD và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi I và K là hai điểm lần lượt lấy trên hai cạnh SB và SD sao cho $\frac{SI}{SB} = \frac{SK}{SD}$. Chứng minh:

a. BD vuông góc với SC.
b. IK vuông góc với mặt phẳng (SAC).

Bài tập 8: Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình vuông cạnh bằng a. mặt bên SAB là tam giác đều; SCD là tam giác vuông cân đỉnh S. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a. Tính các cạnh của ΔSIJ và chứng minh rằng $SI \perp (SCD)$, $SJ \perp (SAB)$.
b. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên IJ. Chứng minh rằng $SH \perp AC$ và tính độ dài SH.

c. Gọi M là một điểm thuộc đường thẳng CD sao cho BM ⊥ SA. Tính AM theo a.

Bài tập 9: Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh SA = a và vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

a. Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp là những tam giác vuông.

b. Từ A kẻ $AB_1 \perp SB$, $AD_1 \perp SD$. Chứng tỏ rằng mặt phẳng $(AB_1D_1) \perp SC$.

Gọi C_1 là giao điểm của SC với (AB_1D_1). Chứng tỏ rằng tứ giác $AB_1C_1D_1$ có hai đường chéo vuông góc với nhau và tính diện tích của tứ giác đó.

Bài tập 10: Cho hình vuông ABCD cạnh bằng a. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) tại A lấy điểm S sao cho $SA = a\sqrt{2}$. Gọi (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SC, (α) cắt SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P.

a. Chứng minh rằng $AM \perp SB$, $AP \perp SD$ và:

$$SM.SB = SN.SC = SP.SD = SA^2.$$

b. Chứng minh rằng tứ giác AMNP nội tiếp được và có hai đường chéo vuông góc với nhau.

c. Gọi O là giao điểm của AC và BD; K là giao điểm của AN và MP. Chứng minh rằng ba điểm S, K, O thẳng hàng.

d. Tính diện tích tứ giác AMNP.

Bài tập 11: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành và SA = SC, SB = SD. Gọi O là giao điểm của AC và BD.

a. Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$.

b. Gọi (d) là giao tuyến của mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SCD), (d_1) là giao tuyến của mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (SAD).

Chứng minh rằng $SO \perp (d' d_1)$.

Bài tập 12: Cho hai hình chữ nhật ABCD và ABEF nằm trong hai mặt phẳng khác nhau sao cho hai đường chéo AC và BF vuông góc. Gọi CH và FK lần lượt là hai đường cao của hai tam giác BCE và ADF. Chứng minh rằng:

a. ACH và BFK là các tam giác vuông.

b. $BF \perp AH$, $AC \perp BK$.

Bài tập 13: Trong mặt phẳng (α) cho góc vuông xOy, (d) là đường thẳng cố định trong (α), (d) cắt Ox, Oy lần lượt tại A và B. Gọi Oz là tia vuông góc với (α), S là một điểm trên Oz. Gọi AE, BF là đường cao của ΔSAB.

a. Cho góc xOy cố định, S di động trên ta Oz. Tìm tập hợp các điểm E và F.

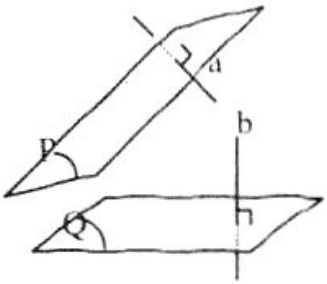
b. Cho S cố định, góc xOy quay quanh O. Chứng minh rằng trực tâm của ΔSAB cố định. Tìm tập hợp các điểm E và F.

Bài tập 14: Trong mặt phẳng (α) cho đường tròn (C), đường kính AB, SA vuông góc với (α). Gọi M là một điểm di động trên (C), H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (SBM). Tìm tập hợp các điểm H.

CHỦ ĐỀ 4 HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG



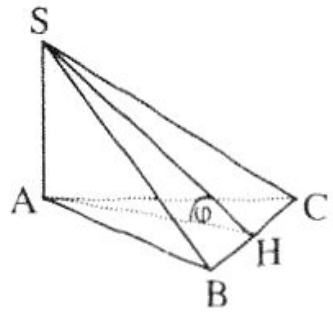
Định nghĩa 1: *Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.*

Đặc biệt: Khi (P) và (Q) trùng nhau hoặc song song với nhau thì $(a, b) = 0^0$.

☞ ***Nhận xét***: Với hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến (d), để tính góc giữa chúng, ta chỉ việc xét một mặt phẳng (R) vuông góc với (d) lần lượt cắt (P) và (Q) theo các giao tuyến a và b. Lúc đó góc giữa (P) và (Q) bằng góc giữa hai đường thẳng a và b.

Bài toán: *Cho hình chóp* S.ABC *có* SA ⊥ (ABC). *Gọi* φ *là góc hợp bởi* (ABC) với (SBC). *Chứng minh rằng*:

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta SBC}.\cos\varphi.$$



✍ *Giải*

Kẻ đường cao AH của ΔABC, ta được:

SH ⊥ BC, theo định lí ba đường vuông góc và $\widehat{SHA} = \varphi$.

Ta có:

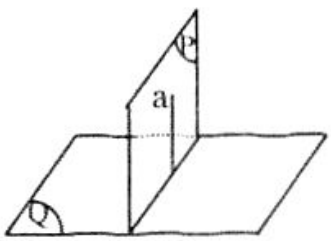
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AH.BC = \frac{1}{2}SH.BC.\cos\varphi = S_{\Delta SBC}.\cos\varphi, \text{ đpcm.}$$

Định lí 1: *Nếu* S *là diện tích của một đa giác* $\mathcal{H}$ *trong mặt phẳng* (P) *và* S' *là diện tích hình chiếu* $\mathcal{H}'$ *của* $\mathcal{H}$ *trên mặt phẳng* (P') *thì* S' = S.cosφ, *trong đó* φ *là góc giữa hai mặt phẳng* (P) *và* (P').

2. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

Định nghĩa: *Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng* 90^0.

Định lí 2 (*Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc*): *Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau nếu một trong hai mặt phẳng đó chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.*



Như vậy:

(P) ⊥ (Q) ⇔ ∃a ∈ (P): a ⊥ (Q).

Hệ quả 1:

a. *Nếu hai mặt phẳng* (P) *và* (Q) *vuông góc với nhau và* A *là một điểm nằm trên* (P) *thì đường thẳng* a *đi qua* A *và vuông góc với* (Q) *sẽ nằm trong* (P).

b. *Nếu hai mặt phẳng* (P) *và* (Q) *vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng* a *nào thuộc mặt phẳng* (P), *vuông góc với giao tuyến của* (P) *và* (Q) *sẽ vuông góc với mặt phẳng* (Q).

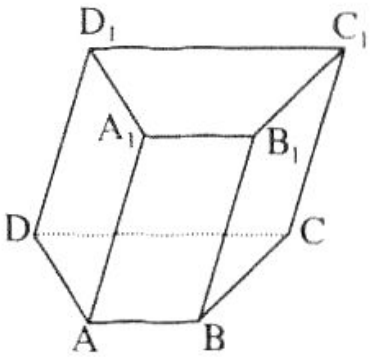
Hệ quả 2: *Hai mặt phẳng cắt nhau cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.*

Hệ quả 3: *Qua đường thẳng* a *không vuông góc với mặt phẳng* (P) *có duy nhất một mặt phẳng* (Q) *vuông góc với mặt phẳng* (P).

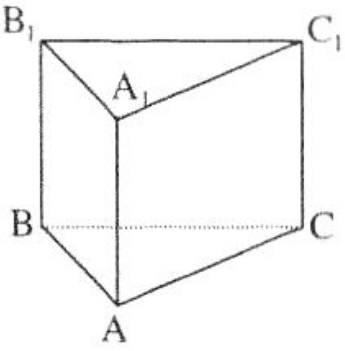
3. HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG. HÌNH HỘP CHỮ NHẬT. HÌNH LẬP PHƯƠNG

Định nghĩa 3: *Một hình lăng trụ được gọi là hình lăng trụ đứng nếu các cạnh bên của nó vuông góc với các mặt đáy.*

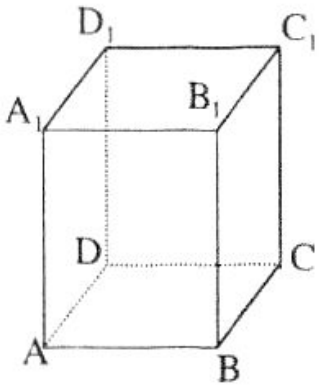
Nhận xét rằng *các mặt bên của hình lăng trụ đứng là những hình chữ nhật và đều vuông góc với đáy.*



Lăng trụ



Lăng trụ đứng



Lăng trụ đều

Ta có các trường hợp:

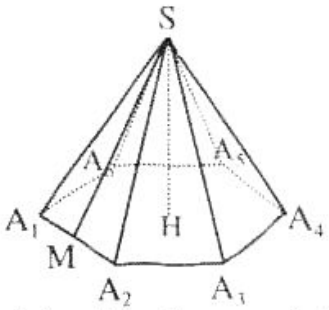
1. *Một hình lăng trụ đứng có đáy là một miền đa giác đều được gọi là lăng trụ đều.* Như vậy, lăng trụ đều có các mặt bên là những hình chữ nhật bằng nhau.
2. *Một hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp đứng.* Như vậy, hình hộp đứng có bốn mặt bên là những hình chữ nhật và hai đáy là hình bình hành.
3. *Một hình lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật được gọi là hình hộp chữ nhật.* Như vậy, hình hộp chữ nhật có sáu mặt đều là những hình chữ nhật.
4. *Hình hộp có tất cả các mặt đều là hình vuông gọi là hình lập phương.*

4. HÌNH CHÓP ĐỀU VÀ HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

Định nghĩa 4: *Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu đáy của nó là miền đa giác đều và chân đường cao của hình chóp trùng với tâm của đa giác đều đó.*

Nhận xét rằng *các cạnh bên của hình chóp đều thì bằng nhau và các mặt bên của nó là những tam giác cân bằng nhau.*

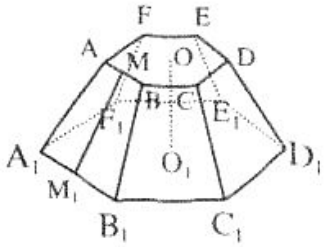
Đoạn thẳng nối đỉnh của hình chóp với trung điểm của một cạnh đáy bất kì gọi là *trung đoạn* của hình chóp đều.



Định nghĩa 5: *Một hình chóp cụt được cắt ra từ một hình chóp đều được gọi là hình chóp cụt đều.*

Khi đó:

- Hai đáy là hai đa giác đều và đồng dạng.
- Đường nối tâm OO_1 của hai đáy gọi là đường cao của hình chóp cụt đều.
- Các mặt bên của hình chóp cụt đều là những hình thang cân và bằng nhau.
- Đoạn thẳng nối trung điểm của hai cạnh đáy thuộc một mặt bên gọi là *trung đoạn* của hình chóp cụt đều.



B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: CHỨNG MINH HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC. CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG.

Phương pháp áp dụng

1. Để chứng minh hai mặt phẳng vuông góc với nhau ta đi chứng minh mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.
2. Để chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng ngoài những cách đã biết, ta còn có thêm hai cách sau:

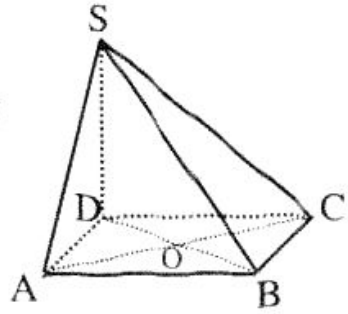
 Cách 1: Sử dụng kết quả của định lí 1.

 Cách 2: Sử dụng kết quả của định lí 3.

Ví dụ 1: *Cho hình chóp* S.ABCD *có đáy* ABCD *là một hình thoi có cạnh a và có* SA = SB = SC = *a. Chứng minh rằng*:

a. *Mặt phẳng* (ABCD) *vuông góc với mặt phẳng* (SBD).

b. *Tam giác* SBD *là tam giác vuông.*



✍ *Giải*

a. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD, ta có:

$BD \perp AC$. (1)

Vì ΔSAC cân tại S nên:

$SO \perp AC$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $AC \perp (SBD) \Rightarrow (ABCD) \perp (SBD)$.

b. Từ giả thiết, ta có:

$$\Delta SAC = \Delta BAC = \Delta DAC \Rightarrow SO = OB = OD \Rightarrow SO = \frac{1}{2}BD.$$

Trong ΔSBD trung tuyến SO thoả mãn $SO = \frac{1}{2}BD$ nên nó là tam giác vuông tại S.

Ví dụ 2: *Cho hình tứ diện* ABCD *có hai mặt* (ABC), (ABD) *cùng vuông góc với mặt phẳng* (DBC). *Vẽ các đường cao* BE, DF *của* ΔBCD *và đường cao* DK *của* ΔACD.

a. *Chứng minh rằng* $AB \perp (BCD)$.

b. *Chứng minh rằng* $(ABE) \perp (ADC)$ *và* $(DFK) \perp (ADC)$.

c. *Gọi* O *và* H *lần lượt là trực tâm của* ΔBCD *và* ΔACD. *Chứng minh rằng* $OH \perp (ACD)$.

✍ *Giải*

a. Ta có:

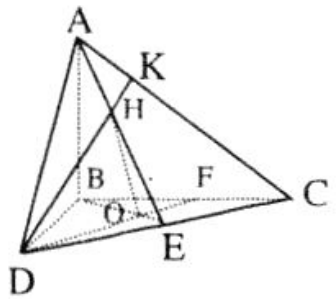
$$\begin{cases}(ABC) \cap (ABD) = AB \\ (ABC) \perp (BCD) \text{ và } (ABD) \perp (BCD)\end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCD).$$

b. Ta có:

$$\begin{cases}CD \perp BE \\ CD \perp AB\end{cases} \Rightarrow (ABE) \perp CD \in (ACD) \Rightarrow (ABE) \perp (ADC).$$

Ta có:

$$\begin{cases}DF \perp BC \\ DF \perp AB\end{cases} \Rightarrow DF \perp (ABC) \Rightarrow DF \perp AC. \quad (1)$$



Mặt khác, ta lại có $DK \perp AC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$(DFK) \perp AC \in (ACD) \Rightarrow (DFK) \perp (ADC)$.

c. Từ kết quả trong b) là:

$(ABE) \perp CD \Rightarrow AE \perp CD \Rightarrow AE \cap DK = H$.

Ta có:

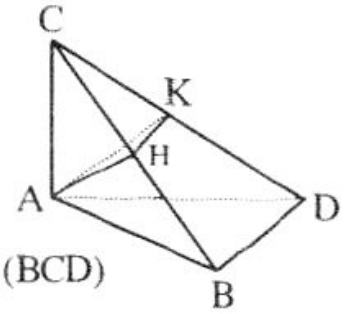
$$\begin{cases}(ABE) \cap (DFK) = OH \\ (ABD) \perp (ACD) \text{ và } (DFK) \perp (ACD)\end{cases} \Rightarrow OH \perp (ACD).$$

Ví dụ 3: (Bài 25/tr 112 – Sgk): *Cho hai mặt phẳng vuông góc* (P) *và* (Q) *có giao tuyến* Δ. *Lấy* A, B *cùng thuộc* Δ *và lấy* $C \in (P)$, $D \in (Q)$ *sao cho* $AC \perp AB$, $BD \perp AB$ *và* $AB = AC = BD$. *Xác định thiết diện của tứ diện* ABCD *khi cắt bởi mặt phẳng* (α) *đi qua điểm* A *và vuông góc với* CD. *Tính diện tích thiết diện khi* $AC = AB = BD = a$.

Giải

Để xác định thiết diện, ta thực hiện:

- Trong (ACD) kẻ AK ⊥ CD.
- Trong (BCD) kẻ HK ⊥ CD.



Suy ra, thiết diện là ΔAHK.

Ta có:

$$\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp AB \end{cases} \Rightarrow BD \perp (ABC) \Rightarrow BD \perp AH \Rightarrow AH \perp (BCD)$$

$\Rightarrow AH \perp HK \Rightarrow \Delta AHK$ vuông tại H

Do đó:

$$S_{\Delta AHK} = \frac{1}{2} AH.HK. \quad (1)$$

Ta có $AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. (2)

Vì hai tam giác CKH và CBD đồng dạng nên:

$$\frac{HK}{DB} = \frac{CK}{CB} \Rightarrow HK = \frac{DB.CK}{CB} = \frac{a\sqrt{6}}{6}. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$S_{\Delta AHK} = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}.$$

Ví dụ 4: *Cho* ΔACD *và* ΔBCD *nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau,* AC = AD = BC = BD = a *và* CD = 2x. *Gọi* I, J *theo thứ tự là trung điểm của* AB *và* CD.

a. *Chứng minh rằng* IJ *vuông góc với* AB *và* CD.

b. *Tính* AB *và* IJ *theo* a *và* x.

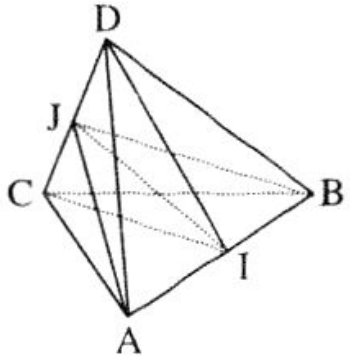
c. *Xác định* x *sao cho* (ABC) ⊥ (ABD).

Giải

a. Xét ΔACD và ΔBCD, ta có:

CD chung

AC = AD = BC = BD



Suy ra:

AJ = BJ ⇔ ΔJAB cân tại J ⇒ IJ ⊥ AB.

Xét ΔCAB và ΔDAB, ta có:

AB chung

AC = AD = BC = BD

Suy ra:

DI = CI ⇔ ΔICD cân tại I ⇒ IJ ⊥ CD.

b. Trong ΔAJC vuông tại J, ta có:

$$AJ^2 = AC^2 - CJ^2 = a^2 - x^2 \Rightarrow AJ = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} (ACD) \perp (BCD) \\ (ACD) \cap (BCD) = CD \\ AJ \perp CD \end{cases} \Rightarrow AJ \perp (BCD) \Rightarrow AJ \perp BJ.$$

Trong ΔAJB vuông cân tại J, ta có:

$$AB = AJ\sqrt{2} = \sqrt{2(a^2 - x^2)} \text{ và } IJ = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{2(a^2 - x^2)}}{2}.$$

c. Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} (ABC) \cap (ABD) = AB \\ DI \perp AB \end{cases}$$

Do đó, để $(ABC) \perp (ABD)$ điều kiện là:

$$DI \perp (ABC) \Rightarrow DI \perp CI \Leftrightarrow \Delta ICD \text{ vuông tại đỉnh I}$$

$$\Leftrightarrow IJ = \frac{1}{2}CD \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2(a^2 - x^2)}}{2} = \frac{1}{2}.2x \Leftrightarrow a = x\sqrt{3}.$$

Vậy, với $a = x\sqrt{3}$ thì hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc với nhau.

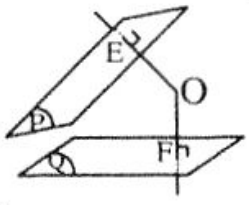
Vấn đề 2: GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG

Phương pháp áp dụng

Để tính góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q), ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: (*Sử dụng định nghĩa*): Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chọn điểm O, từ đó hạ OE, OF theo thứ tự vuông góc với (P) và (Q).



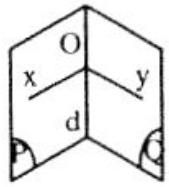
Bước 2: Tính số đo của góc $\widehat{EOF}$.

Bước 3: Khi đó:

- $((P), (Q)) = \widehat{EOF}$, nếu $\widehat{EOF} \le 90^0$.
- $((P), (Q)) = 180^0 - \widehat{EOF}$, nếu $\widehat{EOF} > 90^0$.

Cách 2: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm giao tuyến (d) của (P) và (Q).



Bước 2: Chọn điểm O trên (d), từ đó:

- Trong (P) dựng $Ox \perp (d)$.
- Trong (Q) dựng $Oy \perp (d)$.

Bước 3: Tính số đo của góc xOy.

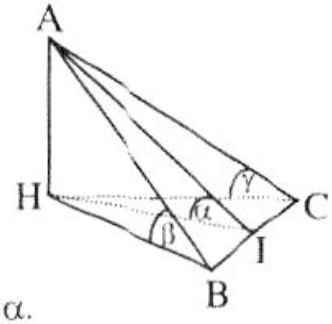
Bước 4: Khi đó:

- $((P), (Q)) = \widehat{xOy}$, nếu $\widehat{xOy} \le 90^0$.
- $((P), (Q)) = 180^0 - \widehat{xOy}$, nếu $\widehat{xOy} > 90^0$.

Ví dụ 1: (Bài 4/tr 120 – Sgk): *Cho* ΔABC *vuông tại* A *có cạnh huyền* BC *thuộc mặt phẳng* (P). *Gọi* β, γ *là góc hợp bởi hai đường thẳng* AB, AC *với* (P). *Gọi* α *là góc hợp bởi* (ABC) *với* (P). *Chứng minh rằng:*

$$\sin^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma.$$

Giải



Kẻ AH vuông góc với mặt phẳng (P), ta được:

$\widehat{ABH} = \beta$, $\widehat{ACH} = \gamma$.

Kẻ HI vuông góc với mặt phẳng BC, suy ra:

BC ⊥ AI, theo định lí ba đường vuông góc $\Rightarrow \widehat{AIH} = \alpha$.

Trong ΔABC vuông tại A, ta có:

$$\frac{1}{IA^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow \frac{AH^2}{IA^2} = \frac{AH^2}{AB^2} + \frac{AH^2}{AC^2} \Leftrightarrow \sin^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma.$$

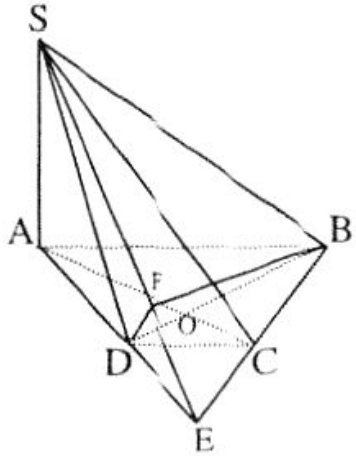
☞ ***Nhận xét***: Như vậy, ví dụ trên đã minh hoạ cách 2 để xác định góc giữa hai mặt phẳng đồng thời ôn lại kiến thức về góc giữa đường thẳng và mặt phẳng. Ví dụ tiếp theo sẽ có tính lựa chọn phong phú hơn.

Ví dụ 2: *Cho hình chóp* S.ABCD *có đáy* ABCD *là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính* AB = 2a, $SA = a\sqrt{3}$ *và vuông góc với mặt phẳng* (ABCD).

a. *Tính góc giữa hai mặt phẳng* (SAD) *và* (SBC).

b. *Tính góc giữa hai mặt phẳng* (SBC) *và* (SCD).

Giải



a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

Cách 1: (Dựng góc dựa trên giao tuyến): Giả sử:

$AD \cap BC = E \Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = SE$.

Nhận xét rằng:

AD ⊥ BD, vì ABCD là nửa lục giác đều

SA ⊥ BD, giả thiết

Suy ra:

$BD \perp (SAD) \Rightarrow BD \perp SE$

Hạ DF ⊥ SE tại F, suy ra:

(BDF) ⊥ SE

Như vậy, ta được một góc phẳng giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là $\widehat{BFD}$.

Vì ΔABE đều nên $AE = AB = 2a$ và vì ΔCDE đều nên $DE = CD = a$.

Trong ΔSAE vuông tại S, ta có:

$$SE^2 = SA^2 + AE^2 = \left(a\sqrt{3}\right)^2 + (2a)^2 = 7a^2 \Rightarrow SE = a\sqrt{7}.$$

Hai tam giác vuông SAE và DFE có chung góc $\hat{E}$ nên chúng đồng dạng, suy ra:

$$\frac{DF}{SA} = \frac{DE}{SE} \Rightarrow DF = \frac{SA.DE}{SE} = \frac{a\sqrt{3}.a}{a\sqrt{7}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Trong ΔABD vuông tại A, ta có:

$$BD = AB.\sin\widehat{BAD} = 2a.\cos 60^0 = a\sqrt{3}.$$

Trong ΔBDF vuông tại D, ta có:

$$\tan\widehat{BFD} = \frac{BD}{DE} = \frac{a\sqrt{3}}{\frac{a\sqrt{21}}{7}} = \sqrt{7} \Rightarrow \widehat{BFD} \text{ nhọn.}$$

Vậy, ta được $\tan((SAD), (SBC)) = \sqrt{7}$.

Cách 2: Nhận xét rằng:

$AD \perp BD$, vì ABCD là nửa lục giác đều

$SA \perp BD$, giả thiết

Suy ra $BD \perp (SAD)$. (1)

Trong (SAC) hạ $AJ \perp SC$ tại J, ta có:

$BC \perp AC$, vì ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp

$BC \perp SA$, giả thiết

Suy ra:

$$BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AJ \Rightarrow AJ \perp (SBC). \quad (2)$$

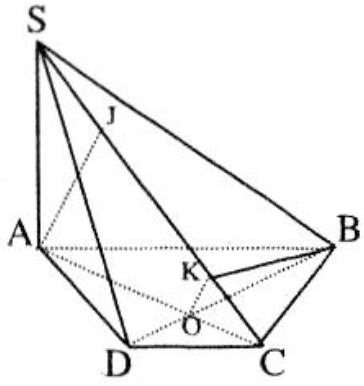
Trong (SAC) hạ $OK \perp SC$ tại K, suy ra $OK \parallel AJ$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $((SAD), (SBC)) = (BD, AJ) = (BD, OK) = \widehat{KOB}$.

Trong nửa lục giác đều ABCD, ta có:

$$OC = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

$$OB = \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$



Trong ΔSAC vuông tại S, ta có:

$$SC^2 = SA^2 + AC^2 = SA^2 + (AB^2 - BC^2)$$

$$= \left(a\sqrt{3}\right)^2 + (4a^2 - a^2) = 6a^2 \Rightarrow SC = a\sqrt{6}.$$

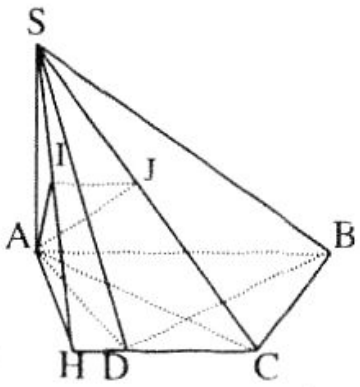
Hai tam giác vuông SAC và OKC có chung góc nhọn $\hat{C}$ nên chúng đồng dạng, suy ra:

$$\frac{OK}{SA} = \frac{OC}{SC} \Rightarrow OK = \frac{SA.OC}{SC} = \frac{a\sqrt{3}.\frac{a\sqrt{3}}{3}}{a\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Trong ΔKOB vuông tại K, ta có:

$$\cos\widehat{KOB} = \frac{OK}{OB} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{6}}{\frac{2a\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Vậy, ta được $\cos((SAD), (SBC)) = \frac{\sqrt{2}}{4}$.



b. Trong (SAC) hạ $AJ \perp SC$ tại J, ta có:

$BC \perp AC$, vì ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp

$BC \perp SA$, giả thiết

Suy ra:

$$BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AJ \Rightarrow AJ \perp (SBC). \quad (4)$$

Hạ $AH \perp CD$ tại H, suy ra:

$$\begin{cases} CD \perp AH \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAH)$$

$\Rightarrow (SCD) \perp (SAH)$ và $(SCD) \perp (SAH) = SH$.

Hạ $AI \perp SH$ tại I, suy ra $AI \perp (SCD)$. (5)

Từ (4) và (5) suy ra $((SCD), (SBC)) = \widehat{IAJ}$.

Trong ΔSAH vuông tại A, ta có $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và:

$$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} + \frac{1}{(a\sqrt{3}/2)^2} = \frac{5}{3a^2} \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

Trong ΔSAC vuông tại A, ta có:

$$AC = SA = a\sqrt{3} \Rightarrow AJ = \frac{1}{2}SC = \frac{SA\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Trong ΔAIJ vuông tại I, ta có:

$$\cos\widehat{IAJ} = \frac{AI}{AJ} = \frac{\frac{a\sqrt{15}}{5}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

Vậy, ta được $\cos((SCD), (SBC)) = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

☞ ***Chú ý***: Thông thường, khi gặp dạng toán yêu cầu tìm giá trị định lượng để hai mặt phẳng tạo với nhau một góc α chúng ta sẽ thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định góc giữa hai mặt phẳng.

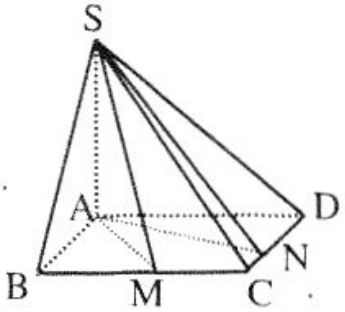
Bước 2: Thiết lập mối quan hệ giữa α và giá trị định lượng cần tìm dựa theo các hệ thức lượng.

Ví dụ 3: (Bài 3/tr 120 – Sgk): *Cho hình chóp* S.ABCD *có đáy* ABCD *là hình vuông cạnh* a, SA ⊥ (ABCD). *Hai điểm* M *và* N *lần lượt thay đổi trên hai cạnh* CB *và* CD, *đặt* CM = x, CN = y. *Tìm hệ thức liên hệ giữa* x *và* y *để*:

a. *Hai mặt phẳng* (SAM) *và* (SAN) *tạo với nhau góc* 45^0.

b. *Hai mặt phẳng* (SAM) *và* (SAN) *vuông góc với nhau.*

Giải



Ta có ngay:

$$\begin{cases} AM \perp SA \\ AN \perp SA \\ (SAM) \cap (SAN) = SA \end{cases} \Rightarrow ((SAM), (SAN)) = \widehat{MAN}.$$

Trong ΔAMN, ta có:

$AM^2 = AB^2 - BM^2 = a^2 - (a - x)^2 = 2ax - x^2$,

$AN^2 = AD^2 - DN^2 = a^2 - (a - y)^2 = 2ay - y^2$,

$MN^2 = CM^2 + CN^2 = x^2 + y^2$,

$$\cos\widehat{MAN} = \frac{AM^2 + AN^2 - MN^2}{2AM.AN} = \frac{a(x + y) - (x^2 + y^2)}{\sqrt{(2ax - x^2)(2ay - y^2)}}.$$

a. Để (SAM) và (SAN) tạo với nhau góc 45^0 điều kiện là:

$$\frac{a(x + y) - (x^2 + y^2)}{\sqrt{(2ax - x^2)(2ay - y^2)}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2a^2 = 2a(x + y) - xy.$$

b. Để (SAM) và (SAN) vuông góc với nhau điều kiện là:

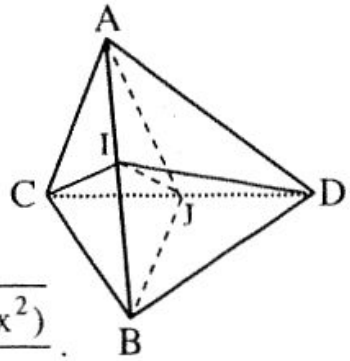
$$\frac{a(x + y) - (x^2 + y^2)}{\sqrt{(2ax - x^2)(2ay - y^2)}} = 0 \Rightarrow a(x + y) = x^2 + y^2.$$

Ví dụ 4: (Bài 27/tr 112 – Sgk): *Cho hai* ΔACD *và* ΔBCD *nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và* AC = AD = BC = BD = a, CD = 2x. *Gọi* I, J *lần lượt là trung điểm của* AB *và* CD.

a. *Tính* AB, IJ *theo* a *và* x.

b. *Với giá trị nào của* x *thì hai mặt phẳng* (ABC) *và* (ABD) *vuông góc với nhau ?*

Gải



a. Ta có ngay:

$$AJ^2 = AC^2 - CJ^2 = a^2 - x^2 \Rightarrow AJ = BJ = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Trong ΔJAB vuông cân tại J, ta có:

$$AB = AJ\sqrt{2} = \sqrt{2(a^2 - x^2)}, \quad IJ = \frac{1}{2}AB = \frac{\sqrt{2(a^2 - x^2)}}{2}.$$

b. Ta có:

- ΔABC cân tại C nên $AB \perp IC$. (1)
- ΔABD cân tại D nên $AB \perp ID$. (2)

Suy ra $\widehat{CID}$ là một trong bốn góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và (ABD).
Từ đó, để:

$$(ABC) \perp (ABD) \Rightarrow \widehat{CID} = 90^0 \Rightarrow IC^2 + ID^2 = CD^2$$
$$\Leftrightarrow 2IC^2 = CD^2 \Leftrightarrow 2(AC^2 - IA^2) = CD^2$$
$$\Leftrightarrow 2\left(a^2 - \frac{a^2 - x^2}{2}\right) = 4x^2 \Leftrightarrow 3x^2 = a^2 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy, với $x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Ví dụ 5: *Cho hình chóp* S. ABCD *có đáy* ABCD *là một hình thoi tâm* I *cạnh* a *và có góc* $\hat{A} = 60^0$, *cạnh* $SC = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ *và* SC *vuông góc với mặt phẳng* (ABCD).

a. *Chứng minh mặt phẳng* (SBD) *vuông góc với mặt phẳng* (SAC).
b. *Trong tam giác* SCA *kẻ* IK *vuông góc với* SA *tại* K. *Hãy tính độ dài* IK.
c. *Chứng minh góc* $BKD = 90^0$ *và từ đó suy ra mặt phẳng* (SAB) *vuông góc với mặt phẳng* (SAD).

Giải

a. Ta có:

$$\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow (SBD) \perp (SAC).$$

b. Trong ΔABD có $\hat{A} = 60^0$ nên nó là tam giác đều, do đó:

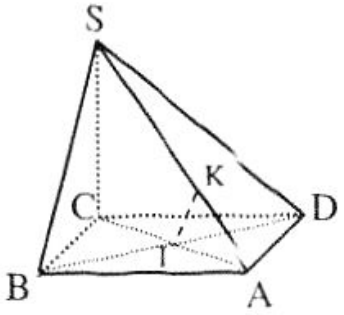
$BD = a$,

$$AI = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = a\sqrt{3}.$$

Trong ΔSAC vuông tại C, ta có:

$$SA^2 = SC^2 + AC^2 = \left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(a\sqrt{3}\right)^2 = \frac{9a^2}{2}$$

$$\Rightarrow SA = \frac{3a\sqrt{2}}{2}.$$



Vì hai tam giác AKI và ACS đồng dạng, nên:

$$\frac{IK}{SC} = \frac{AI}{SA} \Rightarrow IK = \frac{SC.AI}{SA} = \frac{a}{2}.$$

c. Trong ΔKBD trung tuyến KI thoả mãn:

$$KI = \frac{1}{2}BD \Rightarrow \Delta KBD \text{ vuông tại } K \Rightarrow \widehat{BKD} = 90^0.$$

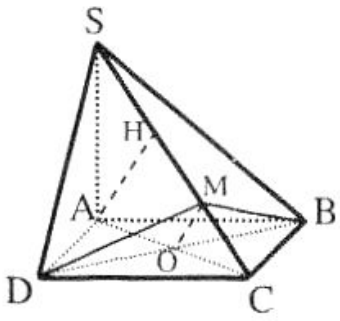
Ta có:

$$\begin{cases} SA \perp BD \\ SA \perp IK \end{cases} \Rightarrow SA \perp (KBD) \Rightarrow \begin{cases} SA \perp KB \\ SA \perp KD \end{cases}$$

$$\Rightarrow ((SAB), (SAD)) = (KB, KD) = 90^0 \Leftrightarrow (SAB) \perp (SAD).$$

Ví dụ 6: (Bài 24/tr 111 – Sgk): *Cho hình chóp* S.ABCD *có đáy* ABCD *là hình vuông cạnh* a *và* SA ⊥ (ABCD), SA = x. *Xác định* x *để hai mặt phẳng* (SBC) *và* (SCD) *tạo với nhau góc* 60^0.

Giải



Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Trong ΔSBC, hạ BM ⊥SC, ta có:

$$\Delta SAB = \Delta SAD \text{ (c.g.c)} \Rightarrow SB = SD$$

$$\Rightarrow \Delta SBC = \Delta SDC \text{ (c.c.c)} \Rightarrow BM = DM \text{ và } SC \perp DM$$

Suy ra $\widehat{BMD}$ là một trong bốn góc mà hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) tạo ra.

Khi đó, gọi O là tâm của hình vuông ABCD thì đ́:

$$((SBC), (SCD)) = 60^0 \Rightarrow \widehat{BMD} = 120^0 \Rightarrow \widehat{BMO} = 60^0$$

$$\Leftrightarrow \tan\widehat{BMO} = \tan 60^0 \Leftrightarrow \frac{OB}{OM} = \sqrt{3}. \quad (1)$$

Ta có ngay:

$$OB = \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \quad (2)$$

Trong ΔSAC hạ AH vuông góc với SC, ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow AH = \frac{ax\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2 + x^2}}.$$

Trong ΔAHC có OM là đường trung bình, suy ra:

$$OM = \frac{1}{2}AH = \frac{ax\sqrt{2}}{2\sqrt{2a^2 + x^2}}. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$\frac{\sqrt{2a^2 + x^2}}{x} = \sqrt{3} \Rightarrow 2a^2 + x^2 = 3x^2 \Rightarrow x = a.$$

Vậy, với x = a thoả mãn điều kiện đầu bài.

Cách 2: Ta lần lượt:

- Hạ AE ⊥ SB, ta có:

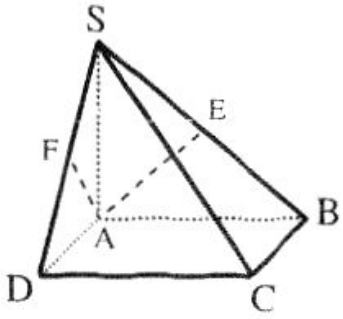
$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AE \Rightarrow AE \perp (SBC).$$

- Hạ AF ⊥ SD, ta có:

$$\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AF \Rightarrow AF \perp (SCD).$$

Từ đó, ta có:

$$((SBC), (SCD)) = \left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}\right).$$



Trong ΔSAB, ta có:

$$\frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow AE = \frac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}},$$

Vì ΔSAB = ΔSAD nên AE = AF và:

$$\frac{EF}{BD} = \frac{SE}{SB} = \frac{SE.SB}{SB^2} = \frac{SA^2}{SB^2} \Rightarrow EF = \frac{SA^2}{SA^2 + AB^2}.BD = \frac{x^2 a\sqrt{2}}{x^2 + a^2}.$$

Khi đó, trong ΔAEF, ta có:

$$EF^2 = AE^2 + AF^2 - 2AE.AF.\cos\widehat{EAF}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^4a^2}{\left(x^2 + a^2\right)^2} = \frac{2a^2x^2}{a^2 + x^2} - \frac{2a^2x^2}{a^2 + x^2}.\cos 60^0 \Leftrightarrow \frac{2x^2}{x^2 + a^2} = 1 \Leftrightarrow 2x^2 = x^2 + a^2$$

$$\Rightarrow x = a.$$

Vậy, với x = a thoả mãn điều kiện đầu bài.

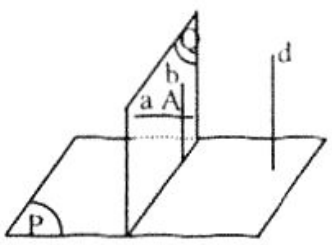
Vấn đề 3: XÁC ĐỊNH MẶT PHẲNG (Q) CHỨA ĐƯỜNG THẲNG a VÀ VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG (P) (a KHÔNG VUÔNG GÓC VỚI (P)) – THIẾT DIỆN

Phương pháp áp dụng

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chọn một điểm A trên a sao cho qua A có thể dựng được đường thẳng b vuông góc với (P) một cách dễ nhất.

Bước 2: Khi đó, mặt phẳng (a, b) chính là mặt phẳng (Q) cần dựng.



☞ ***Chú ý:*** Nếu có đường thẳng (d) ⊥ (P) thì (Q) // (d) hay (Q) chứa (d).

Ví dụ 1: *Cho hình chóp* S.ABCD, *đáy* ABCD *là hình vuông tâm* O *và cạnh* a, SA = a *và vuông góc với mặt phẳng* (ABCD).

a. *Gọi* (α) *là mặt phẳng qua* O, *trung điểm* M *của* SD *và vuông góc với* (ABCD). *Hãy xác định mặt phẳng* (α), *mặt phẳng* (α) *cắt hình chóp* S.ABCD *theo thiết diện là hình gì ? Tính diện tích thiết diện.*

b. *Gọi* (β) *là mặt phẳng qua* A, *trung điểm* E *của* CD *và vuông góc với* (SBC). *Hãy xác định mặt phẳng* (β), *mặt phẳng* (β) *cắt hình chóp* S.ABCD *theo thiết diện là hình gì ? Tính diện tích thiết diện.*

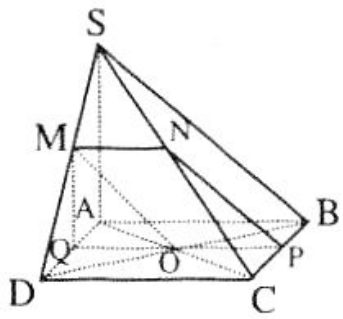
Giải

a. Ta lần lượt thực hiện:

- *Xác định mặt phẳng* (α): Trong (SAD) dựng Mx // SA và cắt AD tại Q là trung điểm của AD, ta có:

 $MQ \perp (ABCD) \Rightarrow MQ \in (\alpha)$.

 Vậy (α) là mặt phẳng (OMQ).



- *Xác định thiết diện*: Kéo dài QO cắt BC tại P là trung điểm của BC, ta có:

$$\begin{cases} PQ \in (\alpha) \text{ và } CD \in (SCD) \\ PQ // CD \\ (\alpha) \cap (SCD) = My \end{cases} \Rightarrow My // CD // PQ$$

Và My cắt SC tại N là trung điểm của SC.

Vậy, mặt phẳng (α) cắt hình chóp S.ABCD theo thiết diện là hình thang vuông MNPQ.

- *Tính diện tích thiết diện*: Ta có:

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MN + PQ).MQ$$

Trong đó:

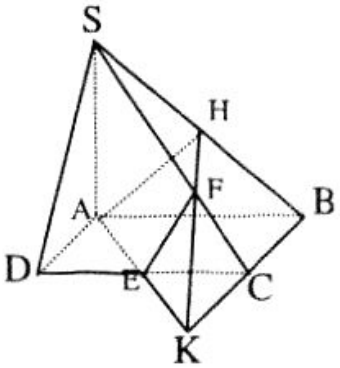
$MN = \frac{1}{2}CD = \frac{a}{2}$, vì MN là đường trung bình của ΔSCD,

$PQ = a$,

$MQ = \frac{1}{2}SA = \frac{a}{2}$, vì MQ là đường trung bình của ΔSAD,

Suy ra:

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{2}\right).\frac{a}{2} = \frac{3a^2}{8}.$$



b. Ta lần lượt thực hiện:

- *Xác định mặt phẳng* (β): Trong (SAB) hạ $AH \perp SB$ và H là trung điểm của AB, ta có:

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$$

ABC

Như vậy:

$$\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \in (\beta).$$

Vậy (β) là mặt phẳng (AHE).

- *Xác định thiết diện*: Kéo dài AE cắt BC tại K, nối HK cắt SC tại F.

 Vậy, mặt phẳng (β) cắt hình chóp S.ABCD theo thiết diện là tứ giác AEFH.

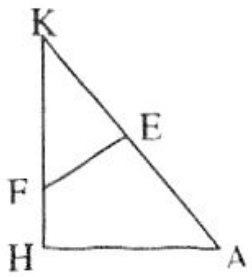
- *Tính diện tích thiết diện*: Ta có:

$$S_{AEFH} = S_{\Delta HAK} - S_{\Delta EKF}$$

$$= \frac{1}{2}AH.KH - \frac{1}{2}KE.KF.\sin\widehat{EKF} = \frac{1}{2}AH.KH - \frac{1}{2}KE.KF.\frac{AH}{AK}.$$

Trong ΔSAB, ta có:

$$AH = \frac{1}{2}SB = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



Trong ΔADE, ta có:

$$AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Trong ΔKAB, ta có:

$$CE \overset{//}{=} \frac{1}{2}AB \Rightarrow KE = AE = \frac{a\sqrt{5}}{2} \text{ và } AK = 2AE = a = a\sqrt{5}.$$

Trong ΔHAK vuông tại H, ta có:

$$KH = \sqrt{AK^2 - AH^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}.$$

Trong ΔSBK, ta có SC và SH là hai đường trung tuyến, do đó:

$$KF = \frac{2}{3}KH = a\sqrt{2}.$$

Từ đó, ta được:

$$S_{AEFH} = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{3a\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{5}}{2}.a\sqrt{2}.\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}.$$

Vấn đề 4: HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG

Phương pháp áp dụng

1. Nắm vững định nghĩa và các tính chất của hình lăng trụ đứng để vẽ hình và chứng minh một số tính chất khác.
2. Việc xác định thiết diện của hình lăng trụ đứng cắt bởi một mặt phẳng được thực hiện dựa trên những phương pháp đã biết.

Ví dụ 1: (Bài 22/tr 111 – Sgk): *Cho hình hộp* ABCD.A'B'C'D' *có* AB = a, BC = b, CC' = c. *Nếu* $AC' = BD' = B'D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ *thì hình hộp đó có phải là hình hộp chữ nhật không ? Vì sao ?*

✍ *Giải*

Khi đó ABCD.A'B'C'D' là hình hộp chữ nhật, bởi ta có:

$A'C^2 + BD'^2 + B'D^2 + AC'^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2)$

$\Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2) + (a^2 + b^2 + c^2) + (a^2 + b^2 + c^2) + AC'^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2)$

$\Rightarrow AC'^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow AC' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Khi đó, hình hộp ABCD.A'B'C'D' có bốn đường chéo bằng nhau nên nó là hình hộp chữ nhật.

Ví dụ 2: (Bài 23/tr 111 – Sgk): *Cho hình lập phương* ABCD.A'B'C'D' *có cạnh bằng* a.

a. *Chứng minh rằng* AC' *vuông góc với* (A'BD) *và* (B'CD').

b. *Cắt hình lập phương bởi mặt phẳng trung trực của* AC'. *Chứng minh thiết diện tạo thành là một lục giác đều. Tính diện tích thiết diện đó.*

✍ *Giải*

a. Ta có:

$$\begin{cases} A'B \perp AB' \\ A'B \perp AD \end{cases} \Rightarrow A'B \perp (AB'C'D) \Rightarrow A'B \perp AC'. \quad (1)$$

$$\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (AA'C'C) \Rightarrow BD \perp AC'. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra $AC' \perp (A'BD)$.

Chứng minh tương tự, ta cũng có $AC' \perp (B'CD')$.

b. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, B'C' và DD', suy ra:

(MNP) song song với các mặt phẳng (AB'D') và (BDC').

Ta nhận xét:

$$\begin{cases} (AB'D') // (MNP) \\ (AB'D') \cap (A'B'C'D') = B'D' \\ (MNP) \cap (A'B'C'D') = Nx \end{cases}$$

Suy ra Nx song song với B'D' và cắt C'D' tại F là trung điểm của C'D'.

$$\begin{cases} (C'BD) // (MNP) \\ (C'BD) \cap (ABCD) = BD \\ (MNP) \cap (ABCD) = My \end{cases}$$

Suy ra My song song với BD và cắt AD tại Q là trung điểm của AD.

Kéo dài FN cắt A'B' tai G, nối GM cắt BB' tại E.

Vậy, thiết diện của hình lập phương với mặt phẳng (MNP) là lục giác MENFPQ và cũng chính là mặt phẳng trung trực của AC'.

Dựa theo tính chất đường trung bình ta thấy ngay MENFPQ là lục giác đều có độ dài cạnh bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Khi đó:

$$S_{MENFPQ} = 6.\frac{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Ví dụ 3: *Cho hình lăng trụ đứng* $ABC.A_1B_1C_1$, *đáy là tam giác đều cạnh* a, $AA_1 = a\sqrt{2}$. *Gọi* M, N *lần lượt là trung điểm các cạnh* AB *và* A_1C_1.

a. *Xác định thiết diện của lăng trụ với mặt phẳng* (α) *qua* MN *và vuông góc với* (BCC_1B_1). *Thiết diện là hình gì ?*

b. *Tính diện tích thiết diện.*

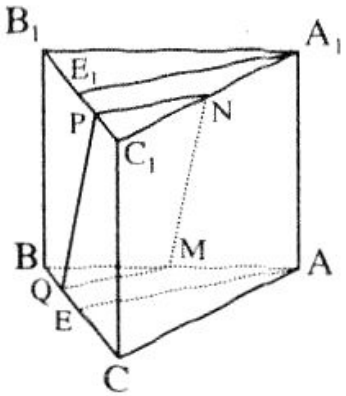
Giải

a. Gọi E, E_1 theo thứ tự là trung điểm của BC và B_1C_1, ta có ngay:

$AE \perp BC \Rightarrow AE \perp (BCC_1B_1)$.

$A_1E_1 \perp B_1C_1 \Rightarrow A_1E_1 \perp (BCC_1B_1)$.

$AE \overset{//}{=} A_1E_1$.



Do đó:

- Dựng Mx // AE cắt BC tại Q là trung điểm của BE.
- Dựng Ny // A_1E_1 cắt B_1C_1 tại P là trung điểm của E_1C_1.

Vì MQ // NP nên M, N, P, Q đồng phẳng, do vậy MNPQ chính là thiết diện cần dựng.

Nhận xét rằng:

$$MQ \overset{//}{=} \frac{1}{2}AE \overset{//}{=} \frac{1}{2}A_1E_1 \overset{//}{=} NP \Rightarrow MNPQ \text{ là hình bình hành.}$$

$MQ \perp (BCC_1B_1) \Rightarrow MQ \perp PQ$.

Vậy, thiết diện MNPQ là hình chữ nhật.

b. Ta có:

$S_{MNPQ} = MQ.NP$.

Trong ΔABC, ta có:

$AE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, vì ΔABC đều và có cạnh bằng a.

Trong ΔABE, ta có:

$MQ = \frac{1}{2}AE = \frac{a\sqrt{3}}{4}$, vì MQ là đường trung bình.

Trong ΔECC_1, ta có:

$$PQ = EC_1 = \sqrt{EC^2 + C_1C^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Từ đó, ta được:

$$S_{MNPQ} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a^2\sqrt{15}}{8}.$$

Ví dụ 4: *Cho hình lăng trụ đứng* $ABC.A_1B_1C_1$ *có đáy* ABC *vuông cân tại* A. *Đoạn nối trung điểm* M *của* AB *và trung điểm* N *của* B_1C_1 *có độ dài bằng* a, MN *hợp với đáy góc* α *và mặt bên* (BCC_1B_1) *góc* β.

a. *Tính các cạnh đáy và cạnh bên của lăng trụ theo* a *và* α.

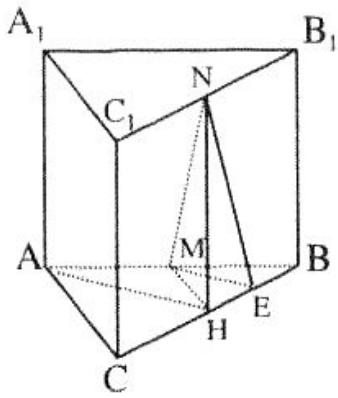
b. *Chứng minh rằng* $\cos\alpha = \sqrt{2}.\sin\beta$.

Giải

a. Gọi H là trung điểm BC, ta có:

$$NH \,//\, BB_1 \Rightarrow NH \perp (ABC)$$

Suy ra MH là hình chiếu vuông góc của MN trên (ABC).



Do đó:

$$(MN, (ABC)) = \widehat{NMH} = \alpha.$$

Ngoài ra:

$$\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp BB_1 \end{cases} \Rightarrow AH \perp (BCC_1B_1).$$

Gọi E là trung điểm BH, suy ra:

$$ME \,//\, AH \Rightarrow ME \perp (BCC_1B_1)$$

Suy ra NE là hình chiếu vuông góc của MN trên (BCC_1B_1), do đó:

$$(MN, (BCC_1B_1)) = \widehat{MNE} = \beta.$$

Trong ΔMNH vuông tại H, ta có:

$$MH = MN.\cos\widehat{NMH} = a.\cos\alpha.$$

$$NH = MN.\sin\widehat{NMH} = a.\sin\alpha \Rightarrow AA_1 = a.\sin\alpha.$$

Trong ΔABC cân tại A, vì MH là đường trung bình nên:

$$AB = AC = 2MH = 2a.\cos\alpha.$$

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2\sqrt{2}\,a.\cos\alpha.$$

$$AH = \frac{1}{2}BC = \sqrt{2}\,a.\cos\alpha.$$

b. Trong ΔMNE vuông tại E, ta có:

$$\sin\beta = \frac{ME}{MN} = \frac{\frac{1}{2}AH}{MN} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}a.\cos\alpha}{a} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \sqrt{2}.\sin\beta.$$

Vấn đề 5: HÌNH CHÓP ĐỀU – HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

Phương pháp áp dụng

1. Nắm vững định nghĩa và các tính chất của hình chóp đều và hình chóp cụt đều để vẽ hình và chứng minh một số tính chất khác.
2. Việc xác định thiết diện của hình chóp đều và hình chóp cụt đều cắt bởi một mặt phẳng được thực hiện dựa trên những phương pháp đã biết.

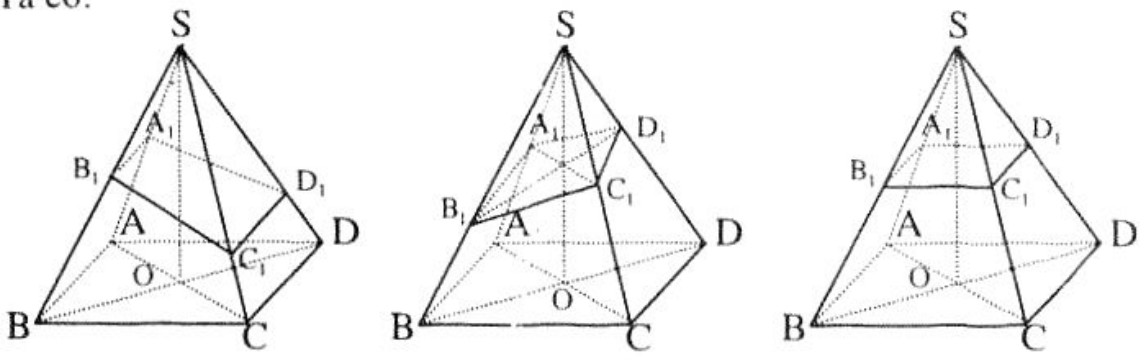
Ví dụ 1: *Cho hình chóp tứ giác đều* S.ABCD. *Một mặt phẳng* (α) *cắt các cạnh* SA, SB, SC, SD *của hình chóp theo thứ tự tại* A_1, B_1, C_1, D_1.

a. *Xét đặc điểm của tứ giác* $A_1B_1C_1D_1$ *khi* A_1B_1 *hoặc* A_1C_1 *hoặc cả hai đường thẳng đó song song với mặt phẳng* (ABCD).

b. *Chứng minh rằng* $\frac{1}{SA_1} + \frac{1}{SC_1} = \frac{1}{SB_1} + \frac{1}{SD_1}$.

Giải

a. Ta có:



Với A_1B_1 // (ABCD) *Với A_1C_1 // (ABCD)* *Với A_1B_1 // (ABCD) và A_1C_1 // (ABCD)*

- Với A_1B_1 // (ABCD) thì:

 $A_1B_1 // AB // CD \Rightarrow A_1B_1 // C_1D_1$ và $A_1D_1 = B_1C_1$

 Do đó, tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ là hình thang cân.
- Với A_1C_1 // (ABCD) thì A_1C_1 // AC.

 Mặt khác, ta lại có:

 $$\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SO \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp B_1D_1 \Rightarrow A_1C_1 \perp B_1D_1.$$

 Do đó, tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ có hai đường chéo vuông góc với nhau.
- Với A_1B_1 // (ABCD) và A_1C_1 // (ABCD) thì

 $(A_1B_1C_1D_1)$ // (ABCD)

 Do đó, tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ là hình vuông.

b. Bạn đọc tự làm

Hướng dẫn: Thực hiện phép tính diện tích ΔSA_1C_1 và ΔSB_1D_1.

Ví dụ 2: *Cho hình chóp tứ giác đều* S.ABCD *có cạnh đáy bằng* a, *tâm* O. *Gọi* M *và* N *lần lượt là trung điểm của các cạnh* SA *và* BC. *Biết rằng góc giữa* MN *và* (ABCD) *bằng* 60^0.

a. *Tính* MN *và* SO.

b. *Tính góc giữa* MN *và mặt phẳng* (SBD).

Giải

a. Gọi H là trung điểm của OA, suy ra:

$$MH \,//\, SO \Rightarrow MH \perp (ABCD)$$

Suy ra NH là hình chiếu vuông góc của MN trên (ABCD), do đó:

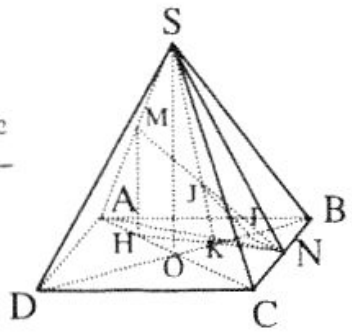
$$(MN, (ABCD)) = \widehat{MNH} = 60^0.$$

Trong ΔHNC, ta có:

$$NH^2 = CN^2 + CH^2 - 2CN.CH.\cos\widehat{NCH}$$

$$= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 2.\frac{a}{2}.\frac{3a\sqrt{2}}{4}.\cos 45^0 = \frac{10a^2}{16}$$

$$\Rightarrow NH = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$$



Trong ΔHMN vuông tại H, ta có:

$$MN = \frac{NH}{\cos\widehat{MNH}} = \frac{\frac{a\sqrt{10}}{4}}{\cos 60^0} = \frac{a\sqrt{10}}{2}.$$

$$MH = NH.\tan\widehat{MNH} = \frac{a\sqrt{10}}{4}.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{30}}{4}.$$

Trong ΔOSA, ta có MH là đường trung bình nên:

$$SO = 2MH = \frac{a\sqrt{30}}{2}.$$

b. Giả sử:

$$AN \cap BD = K \Rightarrow (SAN) \cap (SBD) = SK$$

Giả sử:

$$MN \cap SK = J \Rightarrow MN \cap (SBD) = J.$$

Gọi I là trung điểm OB, ta có:

$$NI \,//\, OC \Rightarrow \begin{cases} NI \perp BD \\ NI \perp SO \end{cases} \Rightarrow NI \perp (SBD)$$

Suy ra IJ là hình chiếu vuông góc của MN trên (SBD), do đó $\left(\widehat{MN, (SBD)}\right) = \widehat{NIJ}$.

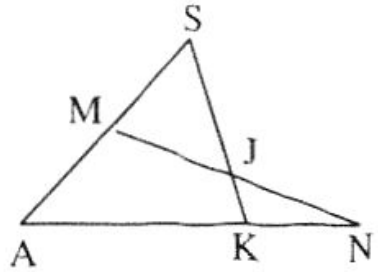
Trong ΔOBC có NI là đường trung bình nên $NI = \frac{1}{2}OC = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Trong ΔABC có trung tuyến AN và BO nên K là trọng tâm, suy ra $\frac{KA}{KN} = 2$.

Dựa vào hình bên, theo định lí Mêlêlaus, ta được:

$$\frac{KA}{KN}.\frac{JN}{JM}.\frac{SM}{SA}=1 \Leftrightarrow 2.\frac{JN}{JM}.\frac{1}{2}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{JN}{JM}=1 \Leftrightarrow JN=\frac{1}{2}MN=\frac{a\sqrt{10}}{4}.$$



Trong ΔNIJ vuông tại I, ta có:

$$\sin\widehat{NIJ}=\frac{NI}{JN}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{a\sqrt{10}}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Vậy, ta được $\sin(MN,(SBD))=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Vấn đề 6: PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC VÀ ỨNG DỤNG

Phương pháp áp dụng

1. Từ công thức diện tích hình chiếu:

$$S' = S.\cos\varphi,$$

nếu biết hai trong ba đại lượng S, S', φ ta tính được đại lượng còn lại. Đặc biệt dựa vào công thức này ta có thể tính góc giữa hai mặt phẳng mà không cần dựng góc phẳng.

2. Từ định lí hình chiếu của một góc vuông:

> " *Hình chiếu vuông góc của một góc vuông là một góc vuông khi và chỉ khi góc vuông đem chiếu có ít nhất một cạnh song song với mặt chiếu hay nằm trong mặt chiếu* "

ta có thể chứng minh được đường thẳng vuông góc với đường thẳng hay đường thẳng song song với mặt phẳng.

☞ ***Chú ý***: Cần lưu ý đến hai tính chất sau của phép chiếu vuông góc:

1. Nếu đoạn thẳng A_1B_1 là hình chiếu vuông góc của đoạn AB trên mặt phẳng (α) thì $A_1B_1 \le AB$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi AB // (α) hay AB ⊂ (α).
2. Phép chiếu vuông góc bảo toàn tỉ số của hai đoạn thẳng cùng phương.

Ví dụ 1: (Bài 27/tr 112 – Sgk): *Cho* ΔABC *và mặt phẳng* (P). *Biết góc giữa* mp(P) *và* mp(ABC) *là* φ, *hình chiếu của* ΔABC *trên mặt phẳng* (P) *là* ΔA'B'C'. *Chứng minh rằng* $S_{A'B'C'} = S_{ABC}.\cos\varphi$.

✍ *Giải*

Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Giả sử BC nằm trong mặt phẳng (P).

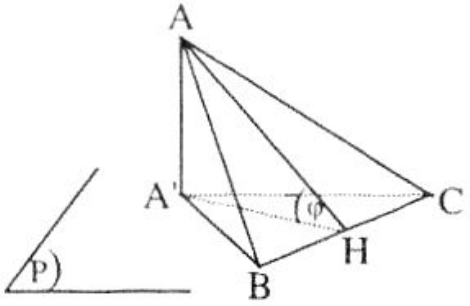
Kẻ đường cao AH của ΔABC, suy ra:

$A'H \perp BC$.

Ta có:

$$S_{A'B'C} = \frac{1}{2}A'H.BC = \frac{1}{2}AH.BC.\cos\varphi$$

$$= S_{ABC}.\cos\varphi, \text{ đpcm.}$$



Trường hợp 2: Giả sử BC không nằm trong mặt phẳng (P).

Dựng mặt phẳng (α) qua B và song song với (P).

- Gọi A_1, C_1 theo thứ tự là hình chiếu của A, C lên (α).
- D là giao điểm của AC với (α).

Ta có:

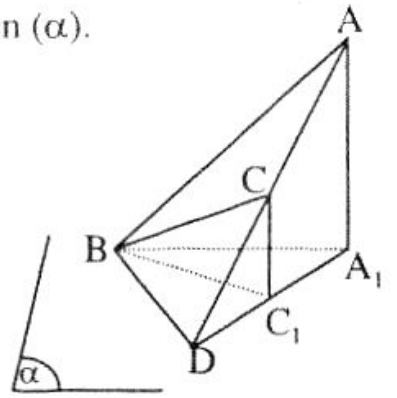
$$S_{A_1BD} = S_{ABD}.\cos\varphi, \qquad (1)$$

$$S_{C_1BD} = S_{CBD}.\cos\varphi, \qquad (2)$$

Trừ theo vế (1) và (2), ta được:

$$S_{A_1BC_1} = (S_{ABD} - S_{CBD})\cos\varphi$$

$$\Leftrightarrow S_{A'B'C} = S_{ABC}.\cos\varphi, \text{ đpcm.}$$



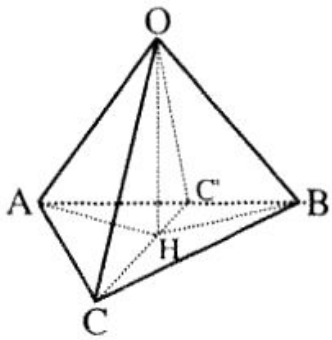
Ví dụ 2: (Bài 5/tr 120 – Sgk): *Cho tứ diện* OABC *có* OA, OB, OC *đôi một vuông góc với nhau và* OA = a, OB = b, OC = c. *Gọi* H *là hình chiếu của* O *trên mặt phẳng* (ABC). *Tính diện tích tam giác* HAB, HBC, HCA.

Giải

Ta có:

$$S_{\Delta HAB} = S_{\Delta OAB}.\cos \widehat{OCH} = \frac{1}{2}OA.OB\sqrt{1-\sin^2 \widehat{OCH}}$$

$$= \frac{1}{2}OA.OB\sqrt{1-\frac{OH^2}{OC'^2}}, \qquad (1)$$



trong đó:

$OA = a$, $OB = b$,

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2} \Rightarrow OH^2 = \frac{a^2b^2c^2}{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}, \qquad (2)$$

$$\frac{1}{OC'^2} = \frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2} \Rightarrow OC'^2 = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}. \qquad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$S_{\Delta HAB} = \frac{1}{2}a.b.\sqrt{1-\frac{\dfrac{a^2b^2c^2}{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}{\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}}} = \frac{a^2b^2}{2\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}.$$

Chứng minh tương tự, ta nhận được:

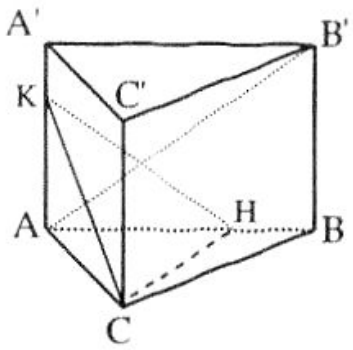
$$S_{\Delta HBC} = \frac{b^2c^2}{2\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}}; \quad S_{\Delta HAC} = \frac{a^2c^2}{2\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}}.$$

Ví dụ 3: (Bài 6/tr 120 – Sgk): *Cho hình lăng trụ đứng* ABC.A'B'C' *có đáy* ABC *là tam giác vuông tại đỉnh* C, CA = a, CB = b; *mặt bên* ABB'A' *là hình vuông. Gọi* (P) *là mặt phẳng đi qua* C *và vuông góc với* AB'.

a. *Xác định thiết diện của hình lăng trụ đã cho khi cắt bởi* (P). *Thiết diện là hình gì ?*

b. *Tính diện tích thiết diện nói trên.*

Giải



a. Để xác định thiết diện, ta thực hiện:

- Kẻ CH vuông góc với AB (suy ra CH ⊥ AB').
- Kẻ HK vuông góc với AB'.

Khi đó, ta được thiết diện là ΔCHK.

b. Vì ΔCHK vuông tại H nên:

$$S_{\Delta CHK} = \frac{1}{2}HC.HK. \qquad (1)$$

Trong ΔABC, ta có:

$$\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{CA^2} + \frac{1}{CB^2} \Rightarrow CH = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad (2)$$

$$AC^2 = AH.AB \Rightarrow AH = \frac{AC^2}{AB} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Nhận xét rằng:

$HK \perp AB' \Rightarrow HK // A'B \Rightarrow \Delta AHK$ vuông cân tại A

$$\Rightarrow HK = AH\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \qquad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$S_{\Delta CHK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{a^2\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a^3b}{\sqrt{2}(a^2 + b^2)}.$$

Ví dụ 4: (Bài 9/tr 126 – Sgk): *Cho* ΔABC *vuông tại* A, AB = a, BC = 2a. *Hai tia* Bx *và* Cy *cùng vuông góc với mặt phẳng* (ABC) *và nằm về một phía đối với mặt phẳng đó. Trên* Bx, Cy *lần lượt lấy các điểm* B', C' *sao cho* BB' = a, CC' = m.

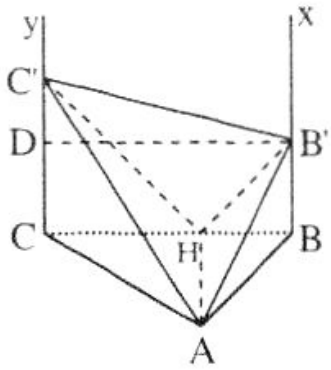
a. *Với giá trị nào của* m *thì* AB'C' *là tam giác vuông ?*

b. *Khi* $\Delta A'B'C'$ *vuông tại* B', *kẻ* $AH \perp BC$. *Chứng minh rằng* B'C'H *là tam giác vuông. Tính góc giữa hai mặt phẳng* (ABC) *và* (AB'C').

Giải

a. Kẻ B'D // BC, suy ra:

$B'D = BC = 2a$ và $C'D = |m - a|$.



Với $\Delta AB'C'$, ta lần lượt có:

$AB'^2 = AB^2 + BB'^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$,

$AC'^2 = AC^2 + CC'^2 = BC^2 - AB^2 + CC'^2$

$= 4a^2 - a^2 + m^2 = 3a^2 + m^2$,

$B'C'^2 = B'D^2 + C'D^2 = 4a^2 + (m - a)^2$,

Khi đó để $\Delta AB'C'$ ta có các trường hợp:

- $\Delta AB'C'$ vuông tại A, điều kiện là:

$B'C'^2 = AC'^2 + AB'^2 \Leftrightarrow 4a^2 + (m - a)^2 = 3a^2 + m^2 + 2a^2 \Rightarrow m = 0$.

- $\Delta AB'C'$ vuông tại B', điều kiện là:

$AC'^2 = B'C'^2 + AB'^2 \Leftrightarrow 3a^2 + m^2 = 4a^2 + (m - a)^2 + 2a^2 \Rightarrow m = 2a$.

- $\Delta AB'C'$ vuông tại C', điều kiện là:

$AB'^2 = AC'^2 + B'C'^2 \Leftrightarrow 2a^2 = 3a^2 + m^2 + 4a^2 + (m - a)^2$

$\Leftrightarrow m^2 - am + 3a^2 = 0$ (*)

Phương trình (*) ẩn m có biệt số $\Delta = a^2 - 12a^2 = -11a^2 < 0$ nên vô nghiệm.

Vậy, với $m = 0$ hoặc $m = 2a$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. Trong ΔABC, ta có:

$$BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{a}{2};$$

$$CH = BC - BH = 2a - \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}.$$

Với $\Delta HB'C'$, ta lần lượt có:

$$HB'^2 = HB^2 + BB'^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 = \frac{5a^2}{4},$$

$$HC'^2 = HC^2 + CC'^2 = \frac{9a^2}{4} + 4a^2 = \frac{25a^2}{4},$$

$B'C'^2 = 4a^2 + (2a - a)^2 = 5a^2$,

Suy ra:

$HC'^2 = B'C'^2 + HB'^2 \Rightarrow \Delta HB'C'$ vuông tại B'.

Gọi $\alpha = ((ABC), (AB'C'))$, ta có:

$$\cos\alpha = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AB'C'}} = \frac{\frac{1}{2}AB.AC}{\frac{1}{2}AB'.B'C'} = \frac{\sqrt{30}}{10}.$$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài tập 1: Cho hai mặt phẳng (α), (β) cắt nhau và một điểm M không thuộc (α) và không thuộc (β). Chứng minh rằng qua điểm M có một và chỉ một mặt phẳng (P) vuông góc với (α) và (β). Nếu (α) song song với (β) thì kết quả trên sẽ thay đổi như thế nào ?

Bài tập 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh bằng a và SA = SB = SC = a.

a. Chứng minh rằng (SBD) $\perp$ (ABCD).

b. Chứng minh rằng ΔSBD vuông.

Bài tập 3: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có SH là đường cao. Chứng minh SA $\perp$ BC và SB $\perp$ AC.

Bài tập 4: Hình hộp ABCD.A'B'C'D' là hình hộp gì nếu thoả mãn một trong các điều kiện sau:

a. Tứ diện AB'C'D' có các cạnh đối bằng nhau.

b. Tứ diện AB'C'D' có các cạnh đối vuông góc.

c. Tứ diện AB'C'D' là tứ diện đều.

Bài tập 5: Trong mặt phẳng (α) cho ΔABC vuông ở B. Một đoạn thẳng AD vuông góc với (α) tại A. Chứng minh rằng:

b. Góc $\widehat{ABD}$ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (DBC).

c. Mặt phẳng (ABD) vuông góc với mặt phẳng (BCD).

d. HK // BC với H và K lần lượt là giao điểm của DB và DC với mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với DB.

Bài tập 6: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $AA_1 = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC_1) và (BCA_1).

Bài tập 7: Cho hình tứ diện ABCD có AB = BC = a, AC = b, DB = DC = x, AD = y. Tìm hệ thức liên hệ giữa a, b, x, y để :

a. (ABC) $\perp$ (BCD).

b. (ABC) $\perp$ (ACD).

Bài tập 8: Cho ΔABC đều cạnh a. Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại D lấy điểm S sao cho $SD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Chứng minh rằng:

a. (SAB) $\perp$ (SAC). b. (SBC) $\perp$ (SAD).

Bài tập 9: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD), M và N là hai điểm lần lượt nằm trên các cạnh BC, CD. Đặt BM = x, DN = y. Tìm hệ thức liên hệ giữa a, x, y để hai mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau.

Bài tập 10: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có các cạnh bên và các cạnh đáy đều bằng a. Gọi O là tâm của hình vuông ABCD.

a. Tính độ dài đoạn thẳng SO.

b. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng SC. Chứng minh hai mặt phẳng (MBD) và (SAC) vuông góc với nhau.

c. Tính độ dài đoạn OM và tính góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và (ABCD).

Bài tập 11: Cho hình chóp S.ABC, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, AB = a, $SA = a\sqrt{3}$ vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi E và F lần lượt là trung điểm của SC và SB, M là một điểm trên cạnh AB, đặt AM = x, với $0 \le x < a$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa EM và vuông góc với mặt phẳng (SAB).

a. Hãy xác định rõ mặt phẳng (α), mặt phẳng (α) cắt hình chóp S.ABCD theo thiết diện là hình gì ?

b. Chứng minh rằng $FM = \sqrt{a^2 - ax + x^2}$. Tính diện tích thiết diện theo a và x.

c. Gọi K là hình chiếu vuông góc của S trên (α). Tìm tập hợp các điểm K khi M di động trên cạnh AB.

Bài tập 12: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông tâm O và cạnh a, SA = a và vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

a. Gọi (α) là mặt phẳng qua O, trung điểm M của SD và vuông góc với (ABCD). Hãy xác định mặt phẳng (α), mặt phẳng (α) cắt hình chóp S.ABCD theo thiết diện là hình gì ? Tính diện tích thiết diện.

b. Gọi (β) là mặt phẳng qua A, trung điểm E của CD và vuông góc với (SBC). Hãy xác định mặt phẳng (β), mặt phẳng (β) cắt hình chóp S.ABCD theo thiết diện là hình gì? Tính diện tích thiết diện.

Bài tập 13: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ và cạnh đáy a. Gọi (α) là mặt phẳng qua A, song song với BC và vuông góc với mặt phẳng (SBC).

a. Hãy xác định mặt phẳng (α). Mặt phẳng (α) cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì ?

b. Tính diện tích thiết diện.

Bài tập 14: Cho hình chóp lục giác đều S.ABCDEF có cạnh bên bằng 2a và cạnh đáy a.

a. Chứng minh rằng $(SBE) \perp (SDF)$.

b. Gọi (α) là mặt phẳng qua A, song song với BC và vuông góc với mặt phẳng (SBC). Hãy xác định mặt phẳng (α). Mặt phẳng (α) cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì ? Tính diện tích thiết diện.

Bài tập 15: Cho hình chóp S.ABC có SA = a và vuông góc với mặt phẳng (ABC), SB = 2a, $SC = a\sqrt{2}$, $BSC = 90^0$.

a. Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC).

b. Tính diện tích ΔABC.

Bài tập 16: Cho ΔABC có đỉnh A nằm trong mặt phẳng (α), hai đỉnh B, C có hình chiếu trên (α) lần lượt là B_1 và C_1 sao cho ΔAB_1C_1 là tam giác đều cạnh a. Giả sử $CC_1 = a$ và $BB_1 = \frac{a}{2}$. Gọi I là giao điểm của BC và B_1C_1.

a. Chứng minh rằng IA ⊥ AC.

b. Tính diện tích ΔABC rồi suy ra giá trị của góc φ giữa hai mặt phẳng (α) và (ABC).

Bài tập 17: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Một mặt phẳng (α) cắt AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 lần lượt tại A', B', C', D'. Đặt AA' = a, BB' = b, CC' = c, DD' = d. Chứng minh rằng:

a. Tứ giác A'B'C'D' là hình bình hành và a + c = b + d.

b. Điều kiện cần và đủ để A'B'C'D' là hình thoi là a = c hay b = d.

c. Nếu a = b thì A'B'C'D' là hình chữ nhật. Mệnh đề đảo có đúng không ?

Bài tập 18: Cho ba tia Ox, Oy, Oz không đồng phẳng và $x\hat{O}y = 90^0$, $x\hat{O}z = y\hat{O}z = 60^0$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (xOz) và (yOz).

Bài tập 19: Cho tứ diện OABC có ba mặt OAB, OAC, OBC là những tam giác vuông tại đỉnh O. Gọi (α), (β), (γ) lần lượt là góc giữa mặt phẳng (ABC) với các mặt phẳng (OAB), (OAC), (OBC). Chứng minh rằng:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Bài tập 20: Cho tam diện Sxyz có Sx, Sy, Sz đôi một vuông góc. Lấy các điểm A, B, C trên Sx, Sy, Sz. Gọi H là trực tâm của ΔABC.

a. Chứng minh rằng SH ⊥ (ABC).

b. Chứng minh rằng $(S_{SBC})^2 = S_{ABC} \cdot S_{HBC}$. Từ đó, suy ra:

$$(S_{ABC})^2 = (S_{SAB})^2 + (S_{SBC})^2 + (S_{SCA})^2.$$

CHỦ ĐỀ 5 KHOẢNG CÁCH

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG, ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Định nghĩa 1: *Khoảng cách từ điểm* M *đến mặt phẳng* (P) (*đến đường thẳng* d) *là khoảng cách giữa hai điểm* M *và* H, *trong đó* H *là hình chiếu vuông góc của điểm* M *trên mặt phẳng* (P) (*trên đường thẳng* d).

2. KHOẢNG CÁCH GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG , GIỮA HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

Định nghĩa 2: *Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng* (P) *song song với* a *là khoảng cách từ một điểm nào đó của* a *đến mặt phẳng* (P).

Định nghĩa 3: *Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.*

3. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

Định lí: *Cho hai đường thẳng chéo nhau* a *và* b, *luôn có duy nhất một đường thẳng* d *cắt cả* a *và* b, *và vuông góc với mỗi đường thẳng ấy. Đường thẳng* d *được gọi là đường vuông góc chung của* a *và* b.

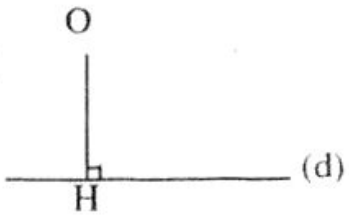
Định nghĩa 4: *Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.*

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM TỚI MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Phương pháp áp dụng

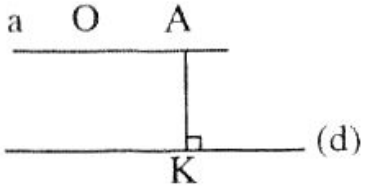
Để tính khoảng cách từ điểm O tới đường thẳng (d), ta thực hiện theo các bước sau:



Bước 1: Trong mặt phẳng (O, d) hạ OH ⊥ (d) với H ∈ (d).

Bước 2: Thực hiện việc xác định độ dài OH dựa trên hệ thức lượng trong tam giác, tứ giác và đường tròn.

☞ ***Chú ý***:

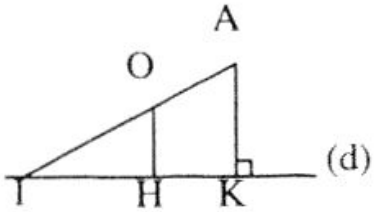


1. Nếu tồn tại đường thẳng a qua O và song song với (d) thì:

$$d(O, d) = d(A, d), \text{ với } A \in (d).$$

2. Nếu $AO \cap (d) = I$ thì:

$$\frac{d(O,d)}{d(A,d)} = \frac{OI}{AI}.$$



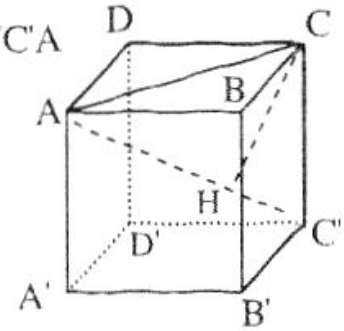
Ví dụ 1: *Cho hình lập phương* ABCD.A'B'C'D' *cạnh* a. *Chứng minh rằng các khoảng cách từ các điểm* B, C, D, A', B', D' *đến đường chéo* AC' *đều bằng nhau. Tính khoảng cách đó.*

✍ *Giải*

Nhận xét rằng:

$\Delta BAC' = \Delta CA'A = \Delta DAC' = \Delta A'AC = \Delta B'C'A = \Delta D'C'A$

và cùng có chung đáy AC' nên khoảng cách từ các điểm B, C, D, A', B', D' đến đường chéo AC' đều bằng nhau.



Hạ CH vuông góc với AC', ta được:

$$\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{C'C^2} \Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

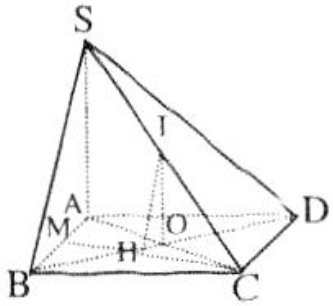
☞ ***Nhận xét***: Như vậy, để tính khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng trong ví dụ trên chúng ta chỉ cần sử dụng công thức về đường cao của một tam giác vuông đã có sẵn các thuộc tính. Do đó, ví dụ trên chỉ mang tính minh hoạ, bởi trong hầu hết các trường hợp chúng ta cần tìm các giá trị trung gian dựa trên kiến thức về hình học phẳng.

Ví dụ 2: *Cho hình chóp* S.ABCD *có đáy* ABCD *là hình vuông cạnh* a, *tâm* O, SA = a *và vuông góc với mặt phẳng* (ABCD). *Gọi* I, M *theo thứ tự là trung điểm của* SC, AB.

a. *Chứng minh rằng* OI ⊥ (ABCD).

b. *Tính khoảng cách từ* I *đến đường thẳng* CM, *từ đó suy ra khoảng cách từ* S *tới* CM.

✍ *Giải*

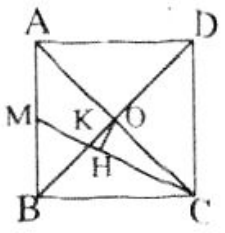


a. Trong ΔSAC, ta có:

OI là đường trung bình ⇒ OI // SA ⇒ OI ⊥ (ABCD).

b. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên CM, ta có:

$$\begin{cases} CM \perp HI \\ CM \perp OI \end{cases} \Rightarrow CM \perp (IOH) \Rightarrow CM \perp OH.$$



Trong ΔABC có K là trọng tâm, ta có:

$$OB = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$OK = \frac{1}{3}OB = \frac{a\sqrt{2}}{6}.$$

Trong ΔOCK vuông tại O, ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OK^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{(a\sqrt{2}/6)^2} + \frac{1}{(a\sqrt{2}/2)^2} = \frac{20}{a^2} \Rightarrow OH = \frac{a}{\sqrt{20}}.$$

Trong ΔOIH vuông tại O, ta có:

$$IH^2 = OI^2 + OH^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{20}}\right)^2 = \frac{3a^2}{10} \Rightarrow IH = \frac{a\sqrt{30}}{10}.$$

Vậy, khoảng cách từ I tới CM bằng $\frac{a\sqrt{30}}{10}$.

Vì $SI \cap CM = C$ nên:

$$\frac{d(S,CM)}{d(I,CM)} = \frac{SC}{IC} = 2 \Rightarrow d(S, CM) = 2d(I, CM) = 2IH = \frac{a\sqrt{30}}{5}.$$

☞ *Nhận xét*: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên:

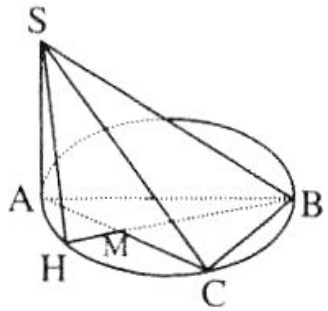
- Với giá trị trung gian OB (ta thấy ngay $OB = \frac{1}{2}BD$) nhưng lại viết dưới dạng $OB = \frac{1}{2}AC$ với mục dích giúp các em học sinh ôn lại *"tính chất đường trung tuyến của một tam giác vuông"*.
- Với giá trị trung gian OB chúng ta cần sử dụng *tính chất trọng tâm của tam giác*.
- Ý tưởng tính khoảng cách từ S tới CM đã được nêu trong phần chú ý của bài toán và các em học sinh cần ghi nhớ nó, bởi để tăng độ khó, bài toán thường được phát biểu dưới dạng bỏ bớt điểm I.

Ví dụ 3: *Cho hình chóp* S.ABC *có* $SA = 2a$ *và vuông góc với mặt phẳng* (ABC), ΔABC *vuông tại* C *với* $AB = 2a$, $B\hat{A}C = 30^0$. *Gọi* M *là một điểm di động trên cạnh* AC, H *là hình chiếu vuông góc của* S *trên* BM.

a. *Chứng minh rằng* $AH \perp BM$.

b. *Đặt* $AM = x$, *với* $0 \le x \le \sqrt{3}$. *Tính khoảng cách từ* S *đến* BM *theo* a *và* x. *Tìm các giá trị của* x *để khoảng cách này có giá trị nhỏ nhất, lớn nhất.*

✍ *Giải*



a. Vì $SA \perp (ABC)$ nên AH là hình chiếu vuông góc của SH trên (ABC), do đó:

$AH \perp BM$, theo định lí ba đường vuông góc.

b. Ta thấy ngay khoảng cách từ S đến BM chính là SH và trong ΔSAH ta có:

$$SH^2 = SA^2 + AH^2. \qquad (1)$$

Trong ΔABC vuông tại C có $\widehat{BAC} = 30^0$ nên:

$$BC = \frac{AB}{2} = a \text{ và } AC = AB.\cos\widehat{BAC} = 2a.\cos 30^0 = a\sqrt{3}.$$

ABC

Trong ΔBCM vuông tại C, ta có:

$$BM^2 = BC^2 + CM^2 = BC^2 + (AC - AM)^2$$
$$= a^2 + (a\sqrt{3} - x)^2 = x^2 - 2\sqrt{3}\,ax + 4a^2$$
$$\Leftrightarrow BM = \sqrt{x^2 - 2\sqrt{3}ax + 4a^2}\,.$$

Nhận xét rằng ΔAMH và ΔCMB là hai tam giác vuông có $\widehat{AMH} = \widehat{CMB}$ nên chúng đồng dạng, suy ra:

$$\frac{AH}{BC} = \frac{AM}{BM} \Rightarrow AH = \frac{AM.BC}{BM} = \frac{xa}{\sqrt{x^2 - 2\sqrt{3}ax + 4a^2}}\,. \qquad (2)$$

Thay (2) và SA = 2a vào (1), ta được:

$$SH^2 = 4a^2 + \frac{x^2a^2}{x^2 - 2\sqrt{3}ax + 4a^2} = \frac{5x^2a^2 - 8\sqrt{3}a^3x + 16a^4}{x^2 - 2\sqrt{3}ax + 4a^2}$$

$$\Leftrightarrow SH = \sqrt{\frac{5x^2a^2 - 8\sqrt{3}a^3x + 16a^4}{x^2 - 2\sqrt{3}ax + 4a^2}}\,.$$

Từ hệ thức (1) với SA = 2a không đổi, ta có nhận xét:

- SH đạt giá trị lớn nhất khi:

$$AH_{Max} \Leftrightarrow AM_{Max} \Leftrightarrow M \equiv C \Leftrightarrow x = a\sqrt{3}\,.$$

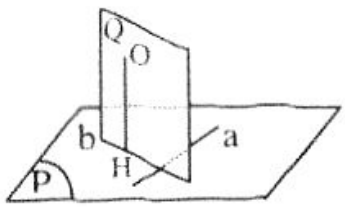
- SH đạt giá trị nhỏ nhất khi:

$$AH_{Min} \Leftrightarrow AM_{Min} \Leftrightarrow M \equiv A \Leftrightarrow x = 0.$$

Vấn đề 2: KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM TỚI MỘT MẶT PHẲNG

Phương pháp áp dụng

Để tính khoảng cách từ điểm O tới mặt phẳng (P), ta thực hiện theo các bước sau:



Bước 1: Để dựng OH với H là hình chiếu vuông góc của O lên (P), ta thực hiện:

- Lấy đường thẳng a nằm trong (P).
- Dựng mặt phẳng (Q) qua O vuông góc với a cắt (P) theo giao tuyến b (cần chọn a sao cho mặt phẳng (Q) dễ dựng).
- Trong (Q), hạ $OH \perp b$ tại H.

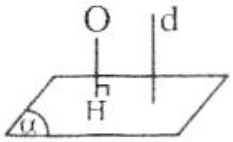
Bước 2: OH là khoảng cách từ O đến (P).

Tính độ dài của đoạn OH là khoảng cách từ O đến (P).

☞ *Chú ý:*

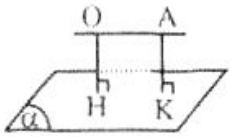
1. Trong bước 1, trước khi chọn a và dựng mặt phẳng (P) nên xét xem a và (P) đã có sẵn trên hình vẽ chưa. Nếu có, chúng ta sẽ giảm thiểu được phép dựng hình.

2. Nếu đã có sẵn đường thẳng d vuông góc với (α) thì chỉ cần dựng Ox // d ta được $Ox \perp (\alpha)$.



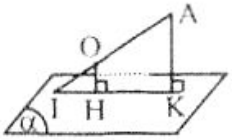
3. Nếu OA // (α) thì:

$$d(O, (\alpha)) = d(A, (\alpha)).$$



4. Nếu OA cắt (α) tại I thì:

$$\frac{d(O,(\alpha))}{d(A,(\alpha))} = \frac{OI}{AI}.$$



5. Sử dụng tính chất của trục đường tròn, cụ thể:

Định nghĩa: *Đường vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn tại tâm của đường tròn gọi là trục của đường tròn đó.*

Ta có thể dùng tính chất của trục đường tròn để:

a. Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

b. Tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

Cụ thể với trường hợp:

- Nếu O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC và M là một điểm cách đều ba điểm A, B, C thì đường thẳng MO là trục của đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Khi đó $MO \perp (ABC)$ và $MO = d(M, (ABC))$.
- Nếu MA = MB = MC và NA = NB = NC trong đó A, B, C là ba điểm không thẳng hàng thì đường thẳng MN là trục của đường tròn qua ba điểm A, B, C. Khi đó $MN \perp (ABC)$ tại tâm O của đường tròn qua ba điểm A, B, C.

Ví dụ 1: *Cho tứ diện đều* ABCD *có cạnh bằng* a. *Gọi* P, Q *theo thứ tự là trung điểm của* BC *và* BD.

a. *Tính khoảng cách từ* A *tới mặt phẳng* (BCD).

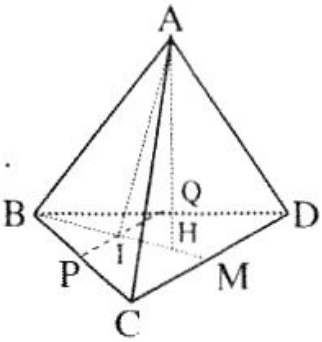
b. *Tính khoảng cách từ* A *tới đường thẳng* PQ.

✍ *Giải*

a. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (BCD), chúng ta đã biết rằng H chính là trọng tâm ΔBCD, do đó:

$$d(A, (BCD)) = AH = \sqrt{AB^2 - BH^2}$$

$$= \sqrt{AB^2 - \left(\frac{2}{3}BM\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{4a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{5}}{3}.$$



b. Giả sử PQ cắt BM tại I thì I là trung điểm của PQ, ta có:

ΔAPQ cân tại $A \Rightarrow AI \perp PQ$.

Do đó:

$$d(A, PQ) = AI = \sqrt{AP^2 - IP^2} = \sqrt{AP^2 - \left(\frac{1}{2}PQ\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{11}}{4}.$$

☞ *Nhận xét*: Như vậy, trong lời giải của ví dụ trên việc khai thác được tính chất của một tứ diện đều (hoặc hình chóp đều) chúng ta xác định được ngay hình chiếu vuông góc của A trên (BCD). Và để tính độ dài của AH chúng ta chỉ cần sử dụng định lí Pitago cùng độ dài đường trung tuyến của một tam giác đều.

Ở ví dụ tiếp theo, chúng ta cũng sẽ dễ dàng dự đoán được đoạn vuông góc nhưng cần phải chứng minh.

Ví dụ 2: *Hình chóp* S.ABCD *có đáy là hình thoi tâm* O *cạnh* a *và có góc* $\widehat{BAD} = 60^0$. *Đường thẳng* SO *vuông góc với mặt phẳng* (ABCD) *và* $SO = \frac{3a}{4}$. *Gọi* E *là trung điểm của* BC, F *là trung điểm của* BE.

a. *Chứng minh mặt phẳng* (SOF) *vuông góc với mặt phẳng* (SBC).

b. *Tính các khoảng cách từ* O *và* A *đến mặt phẳng* (SBC).

✍ *Giải*

a. Với giả thiết, ta có:

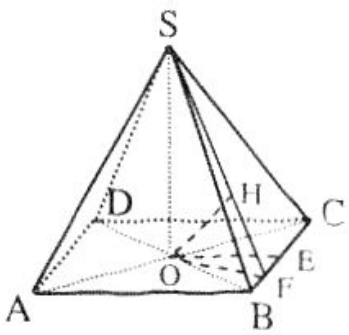
ΔOBE đều $\Rightarrow OF \perp BC$. (1)

Mặt khác, ta cũng có:

$SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp BC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$BC \perp (SOF) \Rightarrow (SBC) \perp (SOF)$.



b. Trong ΔSOF hạ OH vuông góc với SF, suy ra:

$OH \perp (SBC) \Rightarrow OH = d(O, (SBC))$.

Trong ΔSOF vuông tại O, ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OF^2} \Rightarrow OH = \frac{3a}{8}.$$

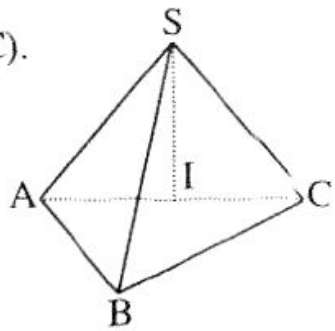
Vì $AO \cap (SBC) = C$ nên:

$$\frac{d(O,(SBC))}{d(A,(SBC))} = \frac{OC}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(A, (SBC)) = 2d(O, (SBC)) = 2OH = \frac{3a}{4}.$$

Ví dụ 3: *Cho hình chóp* S.ABC *có* $\widehat{ASB} = 90^0$, $\widehat{BSC} = 60^0$, $\widehat{ASC} = 120^0$ *và* $SA = SB = SC = a$. *Gọi* I *là trung điểm của cạnh* AC.

a. *Chứng minh rằng* $SI \perp (ABC)$.

b. *Tính khoảng cách từ* S *đến mặt phẳng* (ABC).



✍ *Giải*

a. Trong ΔSAB vuông cân tại S, ta có:

$AB = SA\sqrt{2} = a\sqrt{2}$.

Trong ΔSBC cân tại S có $\widehat{BSC} = 60^0$ nên là tam giác đều, suy ra $BC = a$.

Trong ΔSAC cân tại S, ta có:

$S\hat{A}C = 30^0$,

$AC^2 = SA^2 + SC^2 - 2SA.SC.\cos\widehat{ASC} = 3a^2 \Leftrightarrow AC = a\sqrt{3}$.

Nhận xét rằng:

$AB^2 + BC^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2 = AC^2$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại $B \Rightarrow I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Vậy với SA = SB = SC, ta được:

$SI \perp (ABC)$ và $d(S, (ABC)) = SI$.

b. Trong ΔSAI vuông tại I, ta có:

$$SI = SA.\sin\widehat{SAI} = SA.\sin\widehat{SAC} = a.\sin 30^0 = \frac{a}{2}.$$

Vậy, khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) bằng $\frac{a}{2}$.

Ví dụ 4: *Cho hình chóp* S.ABC *có* SA = SB = SC = a, $ASB = 120^0$, $BSC = 60^0$, $CSA = 90^0$.

a. *Chứng tỏ rằng* ΔABC *là tam giác vuông.*

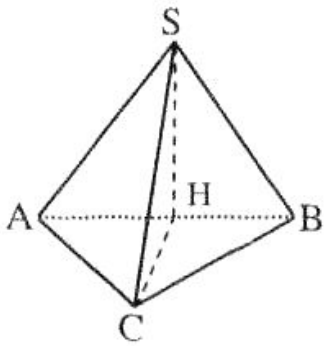
b. *Tính khoảng cách từ* S *đến mặt phẳng* (ABC).

Giải

a. Nhận xét rằng:

- Trong ΔSAB, ta có:

$$AB^2 = SA^2 + SB^2 - 2SA.SB.\cos\widehat{ASB}$$
$$= a^2 + a^2 - 2.a.a.\left(-\frac{1}{2}\right) = 3a^2.$$



- Trong ΔSAC đều, ta có AC = a.
- Trong ΔSBC vuông cân tại S, ta có $BC = a\sqrt{2}$.

Từ đó, nhận thấy:

$AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại C.

b. Gọi H là trung điểm AB, ta có:

$SH \perp AB$, (1)

$$SH = \frac{1}{2}SA = \frac{a}{2}, CH = \frac{1}{2}AB = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

Suy ra:

$$SH^2 + CH^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = a^2 = SC^2 \Rightarrow \Delta HCS \text{ vuông tại H}$$

$\Rightarrow SH \perp HC$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra:

$$SH \perp (ABC) \Rightarrow d(S, (ABC)) = SH = \frac{a}{2}.$$

Ví dụ 5: *Cho hình chóp* S.ABCD *có đáy* ABCD *là hình vuông tâm* O *cạnh bằng* a, $SA = a\sqrt{3}$ *và vuông góc với mặt phẳng* (ABCD).

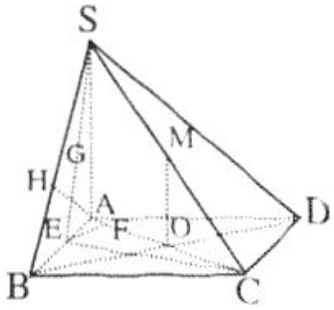
a. *Hãy dựng đường thẳng qua trung điểm của cạnh* SC *và vuông góc với mặt phẳng* (ABCD).

b. *Hãy dựng đường thẳng qua* A *và vuông góc với mặt phẳng* (SBC). *Tính khoảng cách từ* A *đến mặt phẳng* (SBC).

c. *Tính khoảng cách từ* O *đến* (SBC).

d. *Tính khoảng cách từ trọng tâm của* ΔSAB *đến* (SAC).

Giải



a. Gọi M là trung điểm của SC.

Trong ΔSAC, ta có:

OM là đường trung bình

$\Rightarrow$ OM // SA $\Rightarrow$ OM $\perp$ (ABCD).

Vậy OM là đường thẳng cần dựng.

b. Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SAB) \perp (SBC).$$

Hạ AH vuông góc với SB, ta có ngay AH $\perp$ (SBC).

Vậy AH là đường thẳng cần dựng.

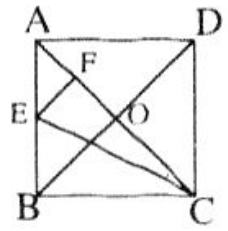
Trong ΔSAB vuông tại A, ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

c. Vì AO $\cap$ (SBC) = C nên:

$$\frac{d(O,(SBC))}{d(A,(SBC))} = \frac{OC}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(O, (SBC)) = \frac{1}{2} d(A, (SBC)) = \frac{1}{2} AH = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

d. Gọi E là trung điểm AB, hạ EF $\perp$ AC, ta được:



$$\begin{cases} EF \perp AC \\ EF \perp SA \end{cases} \Rightarrow EF \perp (SAC)$$

Do đó EF chính là khoảng cách từ E tới (SAC).

Trong ΔOAB, ta có:

EF là đường trung bình $\Rightarrow EF = \frac{1}{2} OB = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Gọi G là trọng tâm ΔABC, vì $EG \cap (SAC) = S$ nên:

$$\frac{d(G,(SAC))}{d(E,(SAC))} = \frac{GS}{ES} = \frac{2}{3} \Rightarrow d(G,(SAC)) = \frac{2}{3}d(E,(SAC)) = \frac{2}{3}EF = \frac{a\sqrt{2}}{6}.$$

Vấn đề 3: KHOẢNG CÁCH GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI MẶT PHẲNG SONG SONG.

Phương pháp áp dụng

1. Cho đường thẳng d song song với mặt phẳng (α), để tính khoảng cách giữa d và (α) ta thực hiện theo các bước:

 Bước 1: Chọn một điểm A trên d, sao cho khoảng cách từ A đến α có thể được xác định dễ nhất.

 Bước 2: Kết luận $d(d,(P)) = d(A,(P))$.

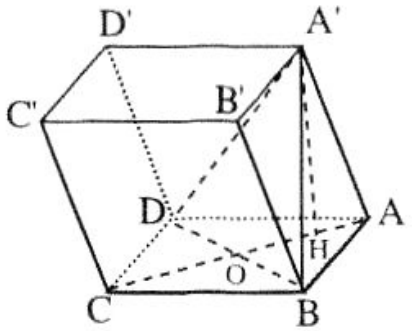
2. Cho hai mặt phẳng song song (P) và (Q), để tính khoảng cách giữa (P) và (Q) ta thực hiện theo các bước:

 Bước 1: Chọn một điểm A trên (P), sao cho khoảng cách từ A đến (Q) có thể được xác định dễ nhất.

 Bước 2: Kết luận $d((P),(Q)) = d(A,(Q))$.

Ví dụ 1: (Bài 33/tr 118 – Sgk): *Cho hình hộp thoi* ABCD.A'B'C'D' *có các cạnh đều bằng* a *và* $\widehat{BAD} = \widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 60^0$. *Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy* (ABCD) *và* (A'B'C'D').

Giải



Hạ $A'H \perp AC$, ta có nhận xét:

$$\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp A'O \end{cases} \Leftrightarrow BD \perp (OAA')$$

$\Rightarrow BD \perp A'H \Rightarrow A'H \perp (ABCD)$,

Và vì (ABCD) // (A'B'C'D') nên A'H chính là khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy.

Nhận xét rằng hình chóp A'.ABD là hình chóp đều, nên ta lần lượt có:

$$AH = \frac{2}{3}AO = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

$$A'H^2 = A'A^2 - AH^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow A'H = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

ABC

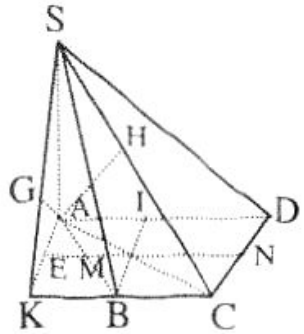
Ví dụ 2: *Cho hình chóp* S.ABCD *có* $SA = a\sqrt{6}$ *và vuông góc với mặt phẳng* (ABCD), *đáy* ABCD *là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính* AD = 2a.

a. *Tính các khoảng cách từ* A *và* B *đến mặt phẳng* (SCD).

b. *Tính khoảng cách từ đường thẳng* AD *đến mặt phẳng* (SBC).

c. *Tính diện tích của thiết diện của hình chóp* S.ABCD *với mặt phẳng* (α) *song song với mặt phẳng* (SAD) *và cách một khoảng bằng* $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Giải



a. Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} CD \perp AC \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC) \Rightarrow (SCD) \perp (SAC).$$

Hạ AH vuông góc với SC, ta có ngay $AH \perp (SCD)$.

Vậy AH là khoảng cách từ điểm A tới (SCD).

Trong ΔSAB vuông tại A, ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{(a\sqrt{6})^2} + \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2a^2} \Rightarrow AH = a\sqrt{2}.$$

Gọi I là trung điểm của AD, suy ra:

$$BI \,//\, CD \Rightarrow BI \,//\, (SCD) \Rightarrow d(B, (SCD)) = d(I, (SCD)).$$

Mặt khác, ta lại có $AI \cap (SCD) = D$ nên:

$$\frac{d(I,(SCD))}{d(A,(SCD))} = \frac{ID}{AD} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow d(I, (SCD)) = \frac{1}{2} d(A, (SCD)) = \frac{1}{2} AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

b. Nhận xét rằng:

$$AD \,//\, CD \Rightarrow AD \,//\, (SBC) \Rightarrow d(AD, (SBC)) = d(A, (SBC)).$$

Hạ AK vuông góc với BC, ta được:

$$\begin{cases} BC \perp AK \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAK) \Rightarrow (SBC) \perp (SAK) \text{ và } (SBC) \cap (SAK) = AK.$$

Hạ AG vuông góc với SK, ta có ngay $AG \perp (SBC)$.

Vậy AG là khoảng cách từ điểm A tới (SBC).

Trong ΔSAK vuông tại A, ta có:

$$\frac{1}{AG^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{(a\sqrt{6})^2} + \frac{1}{(a\sqrt{3}/2)^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow AG = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

c. Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} AK \perp AD \\ AK \perp SA \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SAD).$$

Giả sử mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (SAD) cắt AK tại E, khi đó:

$$d(\alpha, (SAD)) = AE = \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}AK \Rightarrow E \text{ là trung điểm của } AK.$$

Ta đi xác định thiết diện tạo bởi hình chóp với mặt phẳng (α) qua E và song song với (SAD), như sau:

$$\begin{cases} (\alpha) // (SAD) \\ (\alpha) \cap (ABCD) = Ex \\ (SAD) \cap (ABCD) = AD \end{cases} \Rightarrow Ex // AD$$

Và Ex cắt AB, CD theo thứ tự tại M, N là trung điểm của mỗi đoạn.

- Trong mặt phẳng (SAB) dựng My // SA và cắt SB tại Q là trung điểm của SB.
- Trong mặt phẳng (SCD) dựng Nz // SD và cắt SC tại P là trung điểm của SC.

Vậy, thiết diện tạo bởi hình chóp với mặt phẳng (α) là MNPQ, ngoài ra vì:

$MN // CD // PQ \Rightarrow$ MNPQ là hình thang

$MQ // SA \Rightarrow MQ \perp (ABCD) \Rightarrow MQ \perp MN \Rightarrow$ MNPQ là hình thang vuông

Từ đó, ta được $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MN + PQ).MQ$

Trong đó:

$MN = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{3a}{2}$, vì MN là đường trung bình của ABCD,

$PQ = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$, vì PQ là đường trung bình của ΔSBC,

$MQ = \frac{1}{2}SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, vì MQ là đường trung bình của ΔSAB,

Suy ra:

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}\left(\frac{3a}{2} + \frac{a}{2}\right).\frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^2\sqrt{6}}{2}.$$

Vấn đề 4: ĐOẠN VUÔNG GÓC CHUNG CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU.

Phương pháp áp dụng

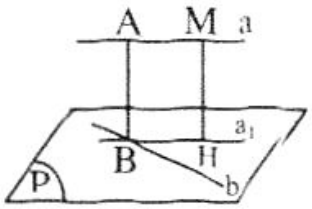
1. Để dựng đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b, ta lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Dựng mặt phẳng (P) chứa b song song với a.

Bước 2: Chọn M trên a, dựng MH vuông góc với (α) tại H.

Bước 3: Từ H, dựng đường thẳng a_1 song song với a, và cắt b tại B.



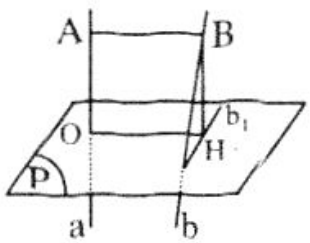
Bước 4: Từ B, dựng đường thẳng song song với MH, cắt (α) tại A. Đoạn AB là đoạn thẳng vuông góc chung của a và b.

Cách 2: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Dựng mặt phẳng (P) vuông góc với a và tại O.

Bước 2: Dựng hình chiếu vuông góc b_1 của b trên (P). Dựng hình chiếu vuông góc H của O trên b_1.

Bước 3: Từ H, dựng đường thẳng song song với a, cắt b tại B.

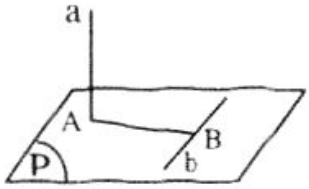


Bước 4: Từ B, dựng đường thẳng song song với OH, cắt a tại A. Đoạn AB là đoạn vuông góc chung của a và b.

Cách 3: (*áp dụng cho trường hợp* a ⊥ b): Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Dựng mặt phẳng (P) chứa b, vuông góc với a tại A.

Bước 2: Dựng AB ⊥ b tại B. Đoạn AB là đoạn vuông góc chung của a và b.



2. Để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau, ta lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Tính độ dài đoạn vuông góc chung (nếu có).

Cách 2: Tính d(a, (α)) với (α) là mặt phẳng chứa b song song với a.

Ví dụ 1: (Bài 32/tr 117 – Sgk): *Cho hình hộp chữ nhật* ABCD.A'B'C'D' *có* AB = AA' = a, AC' = 2a.

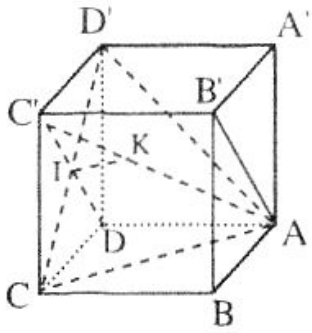
a. *Tính khoảng cách từ điểm* D *đến mặt phẳng* (ACD').

b. *Tìm đường vuông góc chung của các đường thẳng* AC' *và* CD'. *Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng ấy.*

Giải

a. Tứ diện DACD' có DA, DC, DD' đôi một vuông góc với nhau, do đó gọi h = d(D, ((ACD'))) thì:

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{DA^2}+\frac{1}{DC^2}+\frac{1}{DD'^2}\Rightarrow h=\frac{a\sqrt{10}}{5}.$$



b. Gọi I là giao điểm của C'D và CD', hạ IK vuông góc với AC'. Ta đi chứng minh IK chính là đoạn vuông góc chung của AC' và CD', thật vậy:

$$\begin{cases}CD'\perp C'D\\ CD'\perp B'C'\end{cases}\Leftrightarrow CD'\perp (ADC'B')\Rightarrow CD'\perp IK.$$

Vì hai tam giác C'IK và C'AD đồng dạng, nên:

$$\frac{IK}{AD}=\frac{C'I}{C'A}\Rightarrow IK=\frac{AD.C'I}{C'A}=\frac{a}{2}.$$

Ví dụ 2: (Bài 30/tr 117 – Sgk): *Cho hình lăng trụ* ABC.A'B'C' *có tất cả các cạnh đều bằng* a. *Góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng* 30^0. *Hình chiếu* H *của điểm* A *trên mặt phẳng* (A'B'C') *thuộc đường thẳng* B'C'.

a. *Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy.*

b. *Chứng minh rằng hai đường thẳng* AA' và B'C' *vuông góc, tính khoảng cách giữa chúng.*

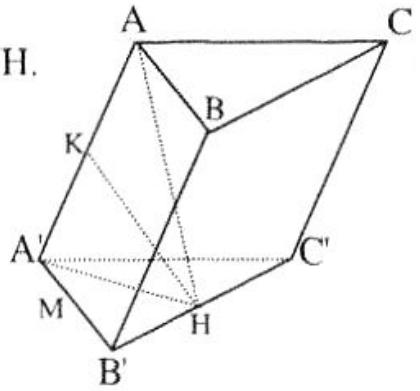
Giải

a. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy chính bằng AH.

Trong ΔHAA', ta có:

$\hat{A}' = 30^0$,

$$AH = AA'.\sin\hat{A}' = a.\sin 30^0 = \frac{a}{2}.$$



b. Ta có:

$$\begin{cases}B'C'\perp AH\\ B'C'\perp A'H\end{cases}\Rightarrow B'C'\perp (HAA')\Rightarrow B'C'\perp AA'.$$

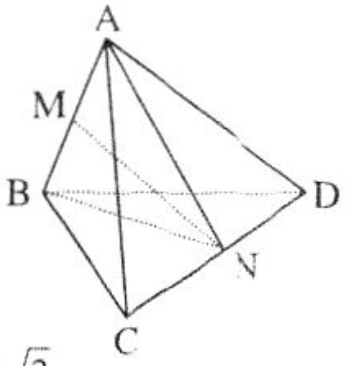
Trong ΔHAA' kẻ HK ⊥ AA' thì HK chính là đoạn vuông góc chung của AA' và B'C'.

Trong ΔHKA', ta có:

$$HK = A'H.\sin\hat{A}' = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Ví dụ 3: *Cho tứ diện đều* ABCD *có cạnh bằng* a. *Tính khoảng cách giữa* AB *và* CD.

✍ *Giải*



Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB và CD, ta thấy ngay:

$$\begin{cases} MN \perp AB \\ MN \perp CD \end{cases}$$

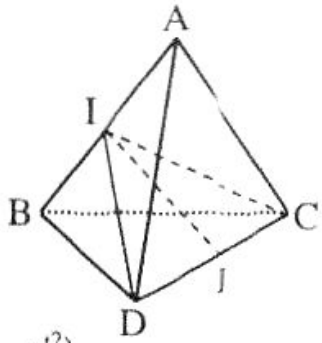
nên MN là đoạn vuông góc chung của AB và CD.

Do đó:

$$d(AB, CD) = MN = \sqrt{AN^2 - AM^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Tổng quát (Bài 29/tr 117 – Sgk): *Cho tứ diện* ABCD *có* AC = BC = AD = BD = a, AB = c, CD = c'. *Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng* AB *và* CD.

✍ *Giải*



Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AB và CD thì:

- $\Delta ABC = \Delta ABD \Rightarrow IC = ID \Rightarrow IJ \perp CD$. (1)
- $\Delta ACD = \Delta BCD \Rightarrow JA = JB \Rightarrow IJ \perp AB$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra IJ chính là đoạn vuông góc chung của AB và CD.

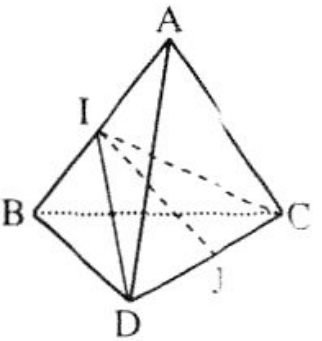
Ta có:

$$IJ^2 = IC^2 - JC^2 = (AC^2 - AI^2) - \left(\frac{CD}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(4a^2 - c^2 - c'^2)$$

$$\Leftrightarrow IJ = \frac{\sqrt{4a^2 - c^2 - c'^2}}{2}.$$

Ví dụ 4: (Bài 35/tr 118 – Sgk): *Cho tứ diện* ABCD. *Chứng minh rằng nếu* AC = BD, AD = BC *thì đường vuông góc chung của* AB *và* CD *là đường thẳng nối hai trung điểm của* AB *và* CD. *Điều ngược lại có đúng không* ?

✍ *Giải*



Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AB và CD.

Từ giả thiết AC = BD, AD = BC, suy ra:

- $\Delta ABC = \Delta BAD \Rightarrow IC = ID \Rightarrow IJ \perp CD$. (1)
- $\Delta ACD = \Delta BDC \Rightarrow JA = JB \Rightarrow IJ \perp AB$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra IJ chính là đoạn vuông góc chung của AB và CD.

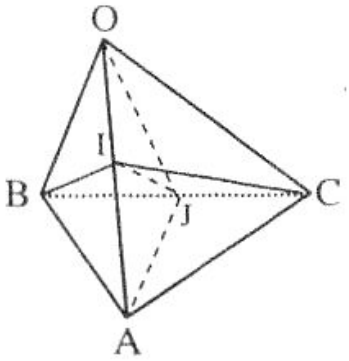
Điều ngược lại vẫn đúng – *Bạn đọc tự chứng minh dựa trên công thức về đường trung tuyến.*

Ví dụ 5: *Tứ diện* OABC *có* OA = OB = OC = a *và* $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = 60^0$, $\widehat{BOC} = 90^0$.

a. *Chứng tỏ rằng* ΔABC *là tam giác vuông và* OA ⊥ BC.

b. *Tìm đường vuông góc chung* IJ *của* OA *và* BC, *tính khoảng cách giữa hai đường thẳng* OA *và* BC.

c. *Chứng minh rằng hai mặt phẳng* (ABC) *và* (OBC) *vuông góc với nhau.*



Giải

a. Nhận xét rằng:

AB = AC = a, vì ΔOAB và ΔOAC đều.

Trong ΔOBC vuông tại O ta có:

$$BC^2 = OB^2 + OC^2 = a^2 + a^2 = AB^2 + AC^2$$

tức là ΔABC vuông cân tại A.

Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của BC và OA, ta có:

$$\begin{cases} BC \perp JO \\ BC \perp JA \end{cases} \Leftrightarrow BC \perp (OAJ) \Rightarrow BC \perp OA.$$

b. Với kết quả trong a), ta có ngay:

$$BC \perp IJ. \qquad (1)$$

$$OJ = AJ = \frac{1}{2}BC \Rightarrow IJ \perp OA. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra IJ chính là đoạn vuông góc chung của OA và BC.

Trong ΔJBI vuông tại J ta có:

$$IJ^2 = BI^2 - BJ^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} \Rightarrow IJ = \frac{a}{2}.$$

c. Nhận thấy $\widehat{OJA}$ là một trong bốn góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và (OBC).

Khi đó, trong ΔOJA ta thấy trung tuyến JI thoả mãn:

$$IJ = \frac{a}{2} = \frac{1}{2}OA \Rightarrow \widehat{OJA} = 90^0 \Rightarrow (ABC) \perp (OBC).$$

Ví dụ 6: (Bài 34/tr 118 – Sgk): *Cho hình chóp* S.ABCD *là hình chữ nhật và* AB = 2a, BC = a. *Các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng* $a\sqrt{2}$.

a. *Tính khoảng cách từ* S *đến mặt phẳng đáy* (ABCD).

b. *Gọi* E *và* F *lần lượt là trung điểm của các cạnh* AB *và* CD; K *là điểm bất kì thuộc đường thẳng* AD. *Chứng minh rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng* EF *và* SK *không phụ thuộc vào* K. *Hãy tính khoảng cách đó theo* a.

✍ *Giải*

a. Gọi O là tâm của hình chữ nhật ABCD, vì các cạnh bên của hình chóp bằng nhau nên:

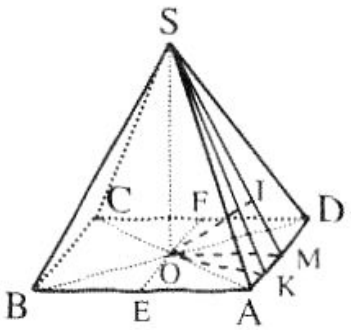
$SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO = d(S, (ABCD))$.

Ta có:

$$SO^2 = SA^2 - AO^2 = SA^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2$$

$$= 2a^2 - \frac{1}{4}(4a^2 + a^2) = \frac{3a^2}{4}$$

$$\Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



b. Ta nhận thấy:

$EF // AD \subset (SAD) \Rightarrow EF // (SAD)$ chứa đường thẳng SK

Do đó, khoảng cách giữa hai đường thẳng EF và SK không phụ thuộc vào K.

Từ nhận xét trên, suy ra $d(EF, SK) = d(EF, (SAD)) = d(O, (SAD))$.

Gọi M là trung điểm của AD, hạ $OI \perp SM$ thì:

$OI \perp (SAD) \Rightarrow OI = d(O, (SAD))$.

Trong ΔOSM, ta có:

$$\frac{1}{OI^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OM^2} \Rightarrow OI = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Ví dụ 7: *Cho tứ diện* S.ABC *có* SA *vuông góc với mặt phẳng* (ABC). *Gọi* H, K *lần lượt là trực tâm của các tam giác* ABC *và* SBC.

a. *Chứng minh ba đường thẳng* AH, SK, BC *đồng quy.*

b. *Chứng minh rằng* SC *vuông góc với mặt phẳng* (BHK) *và* HK *vuông góc với mặt phẳng* (SBC).

c. *Xác định đường vuông góc chung của* BC *và* SA.

✍ *Giải – Bạn đọc tự vẽ hình*

a. Gọi $\{E\} = AH \cap BC$, ta có:

$$\begin{cases} BC \perp AE \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAE) \Rightarrow BC \perp SE$$

$\Rightarrow$ SE là đường cao của Δ SBC $\Rightarrow K \in SE$.

Vậy, ba đường thẳng AH, SK, BC đồng quy tại E.

b. Ta có:

$$\begin{cases} BH \perp AC \\ BH \perp SA \end{cases} \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp SC. \quad (1)$$

Mặt khác, ta có $BK \perp SC$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra:

$SC \perp (BHK) \Rightarrow SC \perp HK$. (3)

Mặt khác, từ a), suy ra $BC \perp HK$. (4)

Từ (3) và (4), suy ra HK ⊥ (SBC).

c. Ta có ngay, đường vuông góc chung của BC và SA là AE.

Ví dụ 8: *Tứ diện* ABCD *có hai mặt* ABC *và* ADC *nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Tam giác* ABC *vuông tại* A *có* AB = a, AC = b. *Tam giác* ADC *vuông tại* D *có* CD = a.

a. *Chứng minh các tam giác* BAD *và* BDC *là các tam giác vuông.*

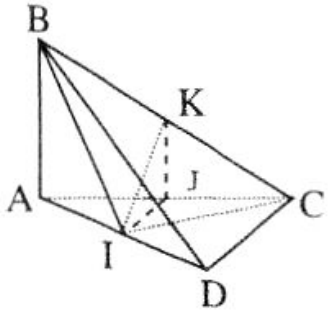
b. *Gọi* I *và* K *lần lượt là trung điểm của* AD *và* BC. *Chứng minh* IK *là đường vuông góc chung của hai đường thẳng* AD *và* BC.

Giải

a. Ta có:

$$\begin{cases}(ABC) \perp (ADC)\\ (ABC) \cap (ADC) = AC \Rightarrow AB \perp (ACD)\\ AC \perp AB \subset (ABC)\end{cases}$$

$\Rightarrow AB \perp AD \Rightarrow \Delta ABD$ vuông tại A.



Ta có:

$$\begin{cases}CD \perp AD\\ CD \perp AB\end{cases} \Leftrightarrow CD \perp (ABD) \Rightarrow CD \perp BC \Rightarrow \Delta CBD \text{ vuông tại D.}$$

b. Ta lần lượt có:

$$AK = \frac{1}{2}BC = DK \Rightarrow \Delta KAD \text{ cân tại K} \Rightarrow IK \perp AD.$$

$\Delta ABD = \Delta DCA$ (c.g.c) $\Rightarrow BI = CI \Rightarrow \Delta IBC$ cân tại I $\Rightarrow IK \perp BC$.

Từ đó, suy ra IK là đường vuông góc chung của hai đường thẳng AD.

Ví dụ 9: *Cho hình chóp* S.ABC *có* SA = 2a *và vuông góc với mặt phẳng* (ABC), *đáy* ABC *là tam giác vuông cân tại* B *với* AB = a. *Gọi* M *là trung điểm của* AC.

a. *Hãy dựng đoạn vuông góc chung của* SM *và* BC.

b. *Tính độ dài đoạn vuông góc chung của* SM *và* BC.

Giải

a. Để dựng đoạn vuông góc chung của SM và BC ta có thể lựa chọn một trong hai cách trình bày sau:

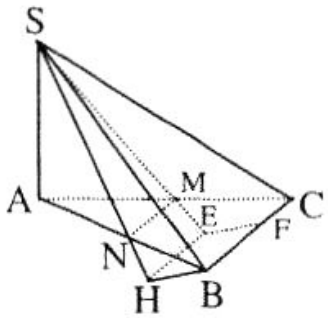
Cách 1: Gọi N là trung điểm của AB, suy ra:

BC // MN $\Rightarrow$ BC // (SMN).

Ta có:

$$\begin{cases}MN \perp AB\\ MN \perp SA\end{cases} \Rightarrow MN \perp (SAB)$$

$\Rightarrow (SMN) \perp (SAB)$ và $(SMN) \cap (SAB) = SN$.



Hạ BH ⊥ SN suy ra BH ⊥ (SMN).

Từ H dựng Hx song song với BC và cắt SM tại E.

Từ E dựng Ey song song với BH và cắt BC tại F.

Đoạn EF là đoạn vuông góc chung của SM và BC.

Cách 2: Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB).$$

Do đó (SAB) chính là mặt phẳng qua B thuộc BC và vuông góc với BC.

Gọi N là trung điểm của AB, suy ra:

$$MN \,//\, BC \Rightarrow MN \perp (SAB)$$

Suy ra SN là hình chiếu vuông góc của SM trên (SAB).

Hạ BH $\perp$ SN suy ra BH $\perp$ (SMN).

Từ H dựng Hx song song với BC và cắt SM tại E.

Từ E dựng Ey song song với BH và cắt BC tại F.

Đoạn EF là đoạn vuông góc chung của SM và BC.

b. Nhận xét rằng ΔSAN và ΔBHN là hai tam giác vuông có hai góc nhọn đối đỉnh nên chúng đồng dạng, suy ra:

$$\frac{BH}{SA} = \frac{BN}{SN} \Rightarrow BH = \frac{SA.BN}{SN}$$

Trong đó:

$$BN = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$$

$$SN^2 = SA^2 + AN^2 = (2a)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{17a^2}{4} \Rightarrow SN = \frac{a\sqrt{17}}{2}$$

Suy ra $BH = \frac{2a\sqrt{17}}{17}$.

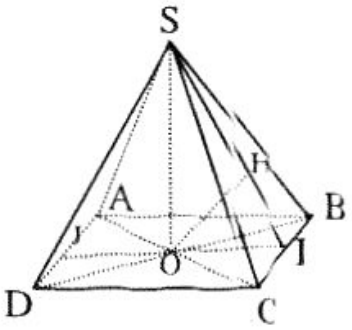
Vậy, khoảng cách giữa SM và BC bằng $\frac{2a\sqrt{17}}{17}$.

Ví dụ 10: *Cho hình chóp* S.ABCD *có đáy là* ABCD *là hình thoi tâm* O, *cạnh* a, *góc* $\hat{A} = 60^0$ *và có đường cao* SO = a.

a. *Tính khoảng cách từ* O *đến* (SBC).

b. *Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng* AD *và* SB.

Giải



a. Hạ OI vuông góc với BC và kéo dài OI cắt AD tại J.

Ta có:

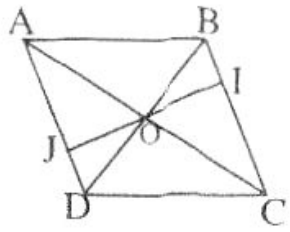
$$\begin{cases} BC \perp OI \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOI)$$

$\Rightarrow (SBC) \perp (SOI)$ và $(SBC) \cap (SOI) = SI$

Hạ OH vuông góc với SI, ta có ngay OH $\perp$ (SBC).

Vậy OH là khoảng cách từ điểm O tới (SBC).

Với hình thoi ABCD, ta có:



$$BD = a, \text{ vì } \Delta ABD \text{ đều} \Rightarrow OB = \frac{a}{2}$$

$$AC = 2AO = 2.\frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

Trong ΔOBC vuông tại O, ta có:

$$\frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{(a/2)^2} + \frac{1}{(a\sqrt{3})^2} = \frac{13}{3a^2} \Rightarrow OI = \frac{a\sqrt{39}}{13}.$$

Trong ΔSAE vuông tại A, ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a\sqrt{39}/13)^2} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Vậy, khoảng cách từ O đến (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

b. Nhận xét rằng:

$$AD // BC \Rightarrow AD // (SBC) \Rightarrow d(AD, SB) = d(AD, (SBC)) = d(J, (SBC)).$$

Mặt khác, ta lại có $JO \cap (SBC) = I$ nên:

$$\frac{d(J,(SBC))}{d(O,(SBC))} = \frac{JI}{OI} = 2 \Rightarrow d(J, (SBC)) = 2d(O, (SBC)) = 2OH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy, khoảng cách giữa SB và AD bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ví dụ 11: (Bài 8/tr 126 – Sgk): *Hình chóp tứ giác đều* S.ABCD *có cạnh đáy bằng* a *và cạnh bên bằng* $a\sqrt{2}$.

a. *Tính khoảng cách từ* S *đến* mp(ABCD).

b. *Tính khoảng cách giữa đường thẳng* AB *và* mp(SCD).

c. *Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng* AB *và* SC.

d. *Gọi* (P) *là mặt phẳng đi qua* A *và vuông góc với* SC. *Hãy xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi* (P). *Tính diện tích thiết diện.*

e. *Tính góc giữa đường thẳng* AB *và mặt phẳng* (P).

Giải

a. Gọi O là tâm của ABCD, ta có ngay:

$$SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO = d(S, (ABCD)).$$

Ta có:

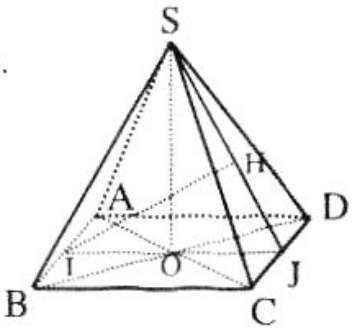
$$SO^2 = SA^2 - OA^2 = (a\sqrt{2})^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{2} \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

b. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AB và CD.

Hạ IH vuông góc với SJ.

Ta có:

$$\begin{cases} CD \perp IJ \\ CD \perp SO \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SIJ) \Rightarrow CD \perp IH \Rightarrow IH \perp (SCD).$$



Nhận xét rằng:

$AB // CD \Rightarrow AB // (SCD)$

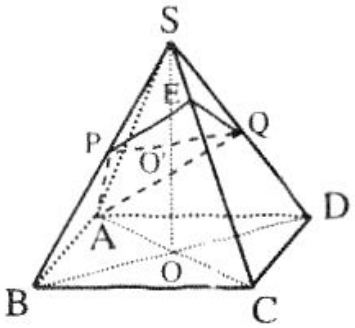
$\Rightarrow d(AB, (SCD)) = d(I, (SCD)) = IH.$

Hai tam giác SOJ và IHJ đồng dạng, nên:

$$\frac{IH}{SO} = \frac{IJ}{SJ} \Rightarrow IH = \frac{SO.IJ}{SJ} = \frac{SO.IJ}{\sqrt{SC^2 - CJ^2}} = \frac{a\sqrt{42}}{7}.$$

c. Ta có ngay:

$$d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = IH = \frac{a\sqrt{42}}{7}.$$



d. Thiết diện được xác định bằng cách:

- Trong (SAC) hạ AE vuông góc với SC.
- Trong (SAB) kẻ EP vuông góc với SC.
- Trong (SAD) kẻ EQ vuông góc với SC.

Khi đó, tứ giác APEQ là thiết diện cần dựng.

Từ cách dựng thiết diện, suy ra:

$$\frac{SP}{SB} = \frac{SQ}{SD} \Rightarrow PQ // BD \Rightarrow PQ \perp (SAC) \Rightarrow PQ \perp AE,$$

Từ đó, ta được:

$$S_{APEQ} = \frac{1}{2} AE.PQ.$$

Vì ΔSAC đều nên:

$$AE = \frac{a\sqrt{6}}{2}, \quad SE = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\frac{PQ}{BD} = \frac{SO'}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow PQ = \frac{2}{3} BD = \frac{2a\sqrt{2}}{3}.$$

Như vậy, ta được:

$$S_{APEQ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{2a\sqrt{2}}{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}.$$

e. Kẻ OM // SC, lấy điểm N sao cho BOMN là hình bình hành. khi đó:

$$BN \perp (P) \Rightarrow \widehat{BAN} = (AB, (P))$$

ta có ngay $\sin \widehat{BAN} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài tập 1: Các điều khẳng định sau đây, điều nào là đúng ?

a. Khoảng cách của hai đường thẳng chéo nhau là đoạn ngắn nhất trong các đoạn thẳng nối hai điểm bất kì nằm trên hai đường thẳng ấy và ngược lại.

b. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng khác.

c. Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng khác.

d. Đường thẳng nào vuông góc với cả hai đường thẳng chéo nhau cho trước là đường vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

Bài tập 2: Trong các mệnh đề sau đây mệnh đề nào là đúng ?

a. Đường thẳng Δ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng a và b nếu Δ vuông góc với a và Δ vuông góc với b.

b. Gọi (P) là mặt phẳng song song với cả hai đường thẳng a, b chéo nhau. Khi đó, đường vuông góc chung Δ của a và b luôn luôn vuông góc với (P).

c. Gọi Δ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b thì Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (a, Δ) và (b, Δ).

d. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Đường thẳng nào đi qua một điểm M trên a đồng thời cắt b tại N và vuông góc với b thì đó là đường vuông góc chung của a và b.

e. Đường vuông góc chung Δ của hai đường thẳng chéo nhau a và b nằm trong mặt phẳng chứa đường này và vuông góc với đường kia.

Bài tập 3: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD'.

Bài tập 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Cạnh SC có độ dài bằng a, hợp với đáy góc α và hợp với mặt bên SAB góc β.

a. Tính SA.

b. Chứng minh rằng $AB = a\sqrt{\cos(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta)}$.

Bài tập 5: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, mặt bên (SBC) vuông góc với đáy. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm AB, SA, AC.

a. Chứng minh rằng (MNP) // (SBC).

b. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (MNP) và (SBC).

Bài tập 6: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là ABCD là hình vuông tâm O cạnh bằng a, SA = a và vuông góc với (ABCD). Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng:

a. SB và AD.

b. SC và BD.

c. SB và CD.

d. SC và AD.

e. SB và AC.

Bài tập 7: Cho đường tròn đường kính AB = 2R chứa trong mặt phẳng α. SA vuông góc với mặt phẳng (α) và SA = h, với $0 < h < 2R$. Gọi M là một điểm di động trên đường tròn. Xác định vị trí của M để đoạn nối trung điểm hai đoạn AM và SB là đoạn thẳng vuông góc chung của chúng, khi đó tính độ dài của đoạn vuông góc chung này.

Bài tập 8: Cho hình chóp S.ABC đáy ABC là tam giác vuông tại A, BC = a, $SA = SB = SC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

a. Tính khoảng cách từ S tới mặt phẳng (ABC).

b. Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC).

Bài tập 9: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a.

a. Chứng minh BC' vuông góc với mặt phẳng (A'B'CD).

b. Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB' và BC'.

Bài tập 10: Cho tứ diện OABC, trong đó OA, OB, OC đối một vuông góc và OA = OB = OC = a. Gọi I là trung điểm của BC. Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng:

a. OA và BC.

b. AI và OC.

Bài tập 11: Cho hình vuông ABCD cạnh bằng a, I là trung điểm của AB. Dựng IS vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $IS = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, SD, SB. Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng:

a. AB và SD.

b. SA và BD.

c. NP và AC.

d. MN và AP.

Bài tập 12: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AB = a, BC = b, CC' = c.

a. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (ACC'A').

b. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và AC'.

Bài tập 13: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'.

a. Chứng minh rằng B'D vuông góc với mặt phẳng (BA'C').

b. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (BA'C') và (ACD').

c. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD'.

Bài tập 14: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy là tam giác đều và $AA_1 = h$. Biết khoảng cách giữa A_1B_1 và BC_1 là d. Tính cạnh đáy của lăng trụ theo d và h.

Bài tập 15: Cho lăng trụ ABC. $A_1B_1C_1$ có các mặt bên đều là hình vuông cạnh a. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm các cạnh BC, A_1C_1, C_1D_1. Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng:

a. A_1B và B_1C.

b. DE và AB_1.

c. A_1B và B_1C_1.

b. DE và A_1F.

Bài tập 16: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $AA_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Gọi O, O_1 theo thứ tự là trung điểm của AB và A_1B_1.

a. Chứng minh rằng $AB \perp (COO_1)$.

b. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và B_1C.

Bài tập 17: Chứng minh rằng nếu đường thẳng nối trung điểm hai cạnh AB và CD của tứ diện ABCD là đường vuông góc chung của AB và CD thì AC = BD và AD = BC.

Bài tập 18: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng 3a, cạnh bên bằng 2a. Tính khoảng cách từ S tới mặt đáy (ABC).

Bài tập 19: Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Tính khoảng cách giữa hai cạnh đối của tứ diện đều đó.

Bài tập 20: Cho hình chóp S.ABCD có SA = 2a và vuông góc với mặt phẳng (ABCD), đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B, AB = BC = a, AD = 2a.

a. Tính các khoảng cách từ A và B đến mặt phẳng (SCD).

b. Tính khoảng cách từ đường thẳng AD đến mặt phẳng (SBC).

c. Tính diện tích của thiết diện của hình chóp S.ABCD với mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (SAD) và cách một khoảng bằng $\frac{a}{3}$.

Bài tập 21: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A với BC = 2a, $ABC = 60^0$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Biết $SA = SC = SM = a\sqrt{5}$.

a. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC).

b. Tính khoảng cách từ S đến AB.

Bài tập 22: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và AC = 2a, SA = a và vuông góc với mặt phẳng (ABC).

a. Chứng minh rằng $(SAB) \perp (SBC)$

b. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

c. Gọi O là trung điểm của AC. Tính khoảng cách từ O đến (SBC).

Bài tập 23: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a, SA = a và vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

a. Gọi I là trung điểm của SD. Chứng minh rằng $AI \perp (SCD)$.

b. Tính khoảng cách từ trọng tâm ΔSBC đến mặt phẳng (ABCD).

Bài tập 24: Cho tứ diện ABCD có hai mặt ABC và ACD nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau, ΔABC vuông tại A, ΔACD vuông tại D.

a. Chứng minh rằng các tam giác ABD và BCD đều vuông.

b. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AD và BC. Tìm điều kiện để IJ là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AD và BC.

Bài tập 25: Cho tứ diện ABCD có bốn mặt là bốn tam giác có diện tích bằng nhau. Chứng minh rằng đoạn nối trung điểm hai cạnh đối diện của tứ diện cũng là đoạn vuông góc chung của hai cạnh đó.

MỤC LỤC

GIỚI THIỆU CHUNG

CHƯƠNG I
PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẲNG

Chủ đề 1: Mở đầu về phép biến hình 5
Chủ đề 2: Phép tịnh tiến và phép dời hình 7
Chủ đề 3: Phép đối xứng trục 28
Chủ đề 4: Phép quay và phép đối xứng tâm 55
Chủ đề 5: Hình bằng nhau 78
Chủ đề 6: Phép vị tự 82
Chủ đề 7: Phép đồng dạng 95

CHƯƠNG II
ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN QUAN HỆ SONG SONG

Chủ đề 1: Đại cương về đường thẳng và mặt phẳng 100
Chủ đề 2: Hai đường thẳng song song 121
Chủ đề 3: Đường thẳng song song với mặt phẳng 131
Chủ đề 4: Hai mặt phẳng song song 141
Chủ đề 5: Phép chiếu song song 160

CHƯƠNG III
VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

Chủ đề 1: Vectơ trong không gian. Sự đồng phẳng của các vectơ 163
Chủ đề 2: Hai đường thẳng vuông góc với nhau 186
Chủ đề 3: Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng 204
Chủ đề 4: Hai mặt phẳng vuông góc 226
Chủ đề 5: Khoảng cách 252

MỤC LỤC 275

ABC